



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE MINAS



DEFINIÇÃO DA CAVA ÓTIMA PARA MINAS A CÉU ABERTO: MÉTODOS CONVENCIONAIS *VERSUS* MODELOS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

PEDRO HENRIQUE DE MATOS FONSECA

**Ouro Preto
Julho de 2019**

PEDRO HENRIQUE DE MATOS FONSECA

**DEFINIÇÃO DA CAVA ÓTIMA PARA MINAS A CÉU ABERTO:
MÉTODOS CONVENCIONAIS *VERSUS* MODELOS DE
PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Minas. **Área de concentração:** Planejamento de Lavra

Orientador: Prof. Elton Destro

**Ouro Preto
Julho de 2019**

FICHA CATALOGRÁFICA

F676d

Fonseca, Pedro Henrique de Matos .

Definição da cava ótima para minas a céu aberto [manuscrito]: métodos convencionais versus modelos de programação matemática / Pedro Henrique de Matos Fonseca. - 2019.

32f.: il.: color.

Orientador: Prof. Dr. Elton Destro.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Geologia.

1. Lavra a céu aberto. 2. Programação (Matemática). 3. Otimização. I. Destro, Elton. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 622.015

Catálogo: ficha.sisbin@ufop.edu.br



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
Universidade Federal de Ouro Preto
Escola de Minas - Departamento de Engenharia de Minas

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos 18 dias do mês de julho de 2019, às 14h00min, no auditório do Departamento de Engenharia de Minas da Escola de Minas - DEMIN/EM, foi realizada a defesa do Trabalho de Conclusão de Curso de Engenharia de Minas requisito da disciplina MIN-491 – Trabalho de Conclusão de Curso II, intitulado **“DEFINIÇÃO DA CAVA ÓTIMA PARA MINAS A CÉU ABERTO: MÉTODOS CONVENCIONAIS VERSUS MODELOS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA”**, pelo aluno **Pedro Henrique de Matos Fonseca**, sendo a comissão avaliadora formada por **Prof. Dr. Elton Destro (orientador)**, **Prof. Dr. Ivo Eyer Cabral** e **Prof. Dr. Carlos Enrique Arroyo Ortiz**.

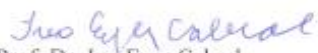
Após arguição sobre o trabalho, a comissão avaliadora deliberou por unanimidade pela aprovação do candidato, com a nota 8,5, concedendo-lhe o prazo de 15 dias para incorporar no texto final da monografia as alterações determinadas/sugeridas pela banca.

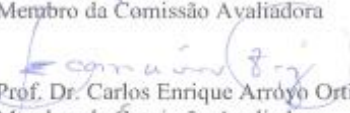
O aluno fará jus aos créditos e conceito de aprovação na disciplina MIN-491 – Trabalho de Conclusão de Curso II após o depósito, no site do Repositório UFOP, da versão final da monografia defendida, conforme modelo do CEMIN-2009, no Colegiado do Curso de Engenharia de Minas – CEMIN.

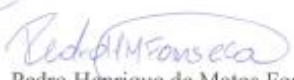
Para fins de registro, foi lavrada a presente ata que, depois de lida e aprovada é assinada pelos membros da comissão avaliadora e pelo discente.

Ouro Preto, 18 de julho de 2019.


Prof. Dr. Elton Destro
Presidente da Comissão Avaliadora e Orientador


Prof. Dr. Ivo Eyer Cabral
Membro da Comissão Avaliadora


Prof. Dr. Carlos Enrique Arroyo Ortiz
Membro da Comissão Avaliadora


Pedro Henrique de Matos Fonseca


Prof. M.Sc. José Fernando Miranda
Professor responsável pela Disciplina Min 491 – Trabalho de Conclusão de Curso

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, Marco Túlio e Fátima, e as minhas irmãs, Anna Carolina, Gabriella e Júlia, pelo incentivo e apoio incondicionais. Não teria chegado até aqui sem o apoio incondicional de vocês.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Elton Destro, pelo grande apoio e ensinamentos.

À República Olympto pelos anos de amizade, companheirismo e ensinamentos. A todos os moradores e amigos que tive o prazer de conviver, principalmente: Patinhas, Kinas, Maxa, Fabichto, Brutus, Trinca, Gretchen, Antero, Megas, Louro, Trava.

Aos amigos do curso de Metalurgia, engenharia de minas e UFOP que foram importantes nesta etapa da minha vivência universitária.

Aos companheiros do time Carcarás pelos ensinamentos e amizade ao longo dessa jornada.

Aos professores do Demin, pelo ensino e troca de experiências.

À UFOP, pelo excelente e tradicional curso de graduação em Engenharia de Minas.

"Julgue seu sucesso pelas coisas que você teve que
renunciar para conseguir."

Dalai Lama

RESUMO

A definição dos limites da cava na fase inicial de um empreendimento mineiro é uma etapa muito importante, porque determina o seu tamanho e forma, bem como delimita a extensão das reservas de minério e a quantidade de material estéril a ser liberado e transportado. O objetivo deste trabalho é estabelecer uma comparação entre Modelos Convencionais (representado pelo Método dos Cones Flutuantes) e de Programação Matemática para a definição da cava ótima, através do uso dos aplicativos computacionais que foram desenvolvidos. Em um primeiro momento, foi implementado o algoritmo relacionado à Técnica dos Cones Flutuantes utilizando o *software* LAZARUS, que resultou no aplicativo computacional MCDesign. O segundo algoritmo foi implementado no *software* LINGO através de um modelo de Programação Matemática. Em seguida, com o auxílio de uma ferramenta do aplicativo de otimização, utilizou-se o *software* Excel para gerar a imagem da cava final. Com o intuito de avaliar qual das técnicas fornece o melhor resultado, foi utilizado um exemplo disponível na literatura que trata do assunto. Os resultados encontrados com o uso das duas técnicas (Cones Flutuantes *versus* Programação Matemática) sugerem que o melhor método para o cálculo do limite da cava é o da Programação Matemática. Essa afirmação é justificada pela análise de alguns parâmetros tais como o valor total referente à soma dos valores econômicos associados a cada bloco e o número de linhas dos códigos implementados.

Palavras-chave: Limites de Cava, Mina a Céu Aberto, Método dos Cones Flutuantes, Programação Matemática

ABSTRACT

The definition of the pit limits in the initial phase of a mining enterprise is a very important step because it determines the size and shape, as well as limits the extent of ore reserves and the amount of waste to be released and transported. The objective of this work is to establish a comparison between Conventional Methods (in this work the Moving Cone Method) and Mathematical Programming for the definition of the optimal pit by using the developed computational applications. At first, was implemented the Moving Cone Algorithm through software Lazarus, which allowed the creation of the application MCDesign. The second algorithm used a mathematical programming model and the software LINGO. Then, using a tool from the compiler itself, the software Excel was used to create a visualization environment for the pit. In order to evaluate which of the situations the best result comes from, it was analyzed an example from the literature. The solution presented suggests that the best method for calculating the pit limit is the Mathematical Programming. This statement is based on the analysis of some parameters such as the total value referring to the sum of the economic values associated with each block and the developed code size.

Keywords: Open Pit Limits, Open Pit Mine, Moving Cone Technique, Mathematical Programming

LISTA DE ABREVIATURAS

PL	Programação Linear
PM	Programação Matemática
MC	Método Convencional
IDE	<i>Integrated Development Environment</i> (Ambiente de Desenvolvimento Integrado)

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Exemplo de um modelo de blocos e sua orientação no espaço. Fonte: Curi (2014).	5
Figura 2 - Métodos utilizados para obter os limites de cava. Fonte: Wright (1990) <i>apud</i> Curi (2014).	6
Figura 3 - Seção vertical de um modelo de blocos e o cone indicando os limites da cava. Fonte: Wright, (1990).	6
Figura 4 - Etapas para execução do cálculo para o modelo de cones flutuantes. Fonte: Curi (2014).	8
Figura 5 - Seção vertical discretizada em blocos. Fonte: Wright (1990).	9
Figura 6 - Primeira verificação do cone invertido em busca de um bloco positivo. Fonte: Wright (1990).	9
Figura 7 - Segunda verificação do cone invertido para avaliar a viabilidade da exploração do bloco de minério. Fonte: Wright (1990).	10
Figura 8 - Terceira verificação do cone invertido. Fonte: Wright (1990).	10
Figura 9 - Seção vertical da jazida discretizada em blocos. Fonte: Curi (2014).	12
Figura 10 - Seção vertical da figura 9 com os valores acumulados de M_{ij} e a primeira linha acrescida de zeros. Fonte: Curi (2014).	13
Figura 11 - Seção anterior (figura 10) com os valores calculados de P_{ij} . Fonte: Curi (2014).	13
Figura 12- Cava Final otimizada com os valores originais. Fonte: Curi (2014).	13
Figura 13 - Modelo de blocos para comparação dos métodos. Fonte: Wright (1990).	17
Figura 14 - Interface do aplicativo MCDesign.	18
Figura 15 – Campo utilizado para se estabelecer as dimensões do modelo de blocos.	19
Figura 16 - Exemplo de uma Matriz 10 x 15 no aplicativo MCDesign.	19
Figura 17 – Botão para leitura do valor econômico dos blocos.	20
Figura 18 – Procedimento definir cava.	21
Figura 19 - Resultado para Relação E/M	21
Figura 20 – Opção para abrir e salvar dados.	22
Figura 21 - Modelo do exemplo utilizado para otimização da cava.	24
Figura 22 - Ambiente auxiliar no Excel representando o modelo de blocos.	25
Figura 23- Cava Calculada na primeira iteração do aplicativo dos cones flutuantes.	27

Figura 24 - Modelo de blocos resultante da primeira iteração.	28
Figura 25 - Cava calculada na segunda iteração do aplicativo dos cones flutuantes.	29
Figura 26 - Resultado relação Estéril/Minério 1ª iteração.....	29
Figura 27 - Resultado relação Estéril/Minério 2ª iteração.....	30
Figura 28 - Cava Ótima fornecida pelo modelo de otimização.	30

SUMÁRIO

RESUMO	viii
ABSTRACT	ix
LISTA DE FIGURAS	xi
SUMÁRIO	xiii
1. INTRODUÇÃO	1
2. OBJETIVOS	3
2.1. Geral	3
2.2. Específicos	3
3. REVISÃO DA LITERATURA.....	4
3.1. Modelo de Blocos.....	4
3.2. Métodos computacionais para definição dos limites da cava 2-D.....	5
3.2.1.Métodos dos Cones Flutuantes	6
3.2.2.Método de Lerschs e Grossman	11
3.3. Métodos de Programação Matemática.....	14
4. METODOLOGIA	17
4.1. Método dos Cones Flutuantes - <i>Software</i> MCDesign.....	17
4.2. Método Programação Matemática – <i>Software</i> LINGO	22
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO	26
5.1. Cones Flutuantes	26
5.2. Primeira iteração	27
5.3. Segunda iteração	27
5.4. Relação Estéril/Minério	29
5.5. Programação matemática.....	30
6. CONCLUSÕES.....	31
REFERÊNCIAS	32

1. INTRODUÇÃO

No século XXI, nota-se o aumento da dependência do homem aos produtos industrializados e com alta tecnologia em diversos setores da sociedade. Isso exige um aproveitamento cada vez maior dos recursos da Indústria Mineral para suprir a demanda crescente por matéria-prima em diversos mercados, principalmente em países com setor industrial altamente desenvolvido como Estados Unidos e China.

Dessa forma, a indústria extrativa, segundo Curi (2014), tem como objetivo principal maximizar o valor atual líquido dos benefícios monetários futuros do empreendimento de forma a viabilizar a execução do projeto e atender às exigências do mercado consumidor. Porém, como característica peculiar deste setor, a mineração utiliza de recursos exauríveis e não renováveis, ou seja, existe uma vida útil definida em que é necessário maximizar a quantidade de recursos explorados.

É por isso que, na fase inicial, o projeto de mineração deva ser estruturado e avaliado para que ele tenha êxito e seja rentável durante toda a operação. Dessa maneira, devem-se cumprir algumas etapas, como a elaboração do planejamento, que constitui de três estudos: estudo conceitual, preliminar e de viabilidade.

Assim é necessário realizar alguns estudos preliminares para a avaliação das reservas minerais tais como a construção de um modelo geológico, que consiste em uma análise estatística e geoestatística para verificar os dados referentes à reserva mineral contidos no banco de dados geológico; a construção de um modelo econômico, que constitui na análise de rentabilidade; a construção do desenho da mina através de critérios operacionais e ambientais, em que serão definidos todos os parâmetros físicos da cava e, como última etapa, a delimitação das reservas lavráveis.

A definição dos limites da cava na fase inicial de um empreendimento mineiro determina o tamanho e a forma da mina. Isso delimita a extensão das reservas de minério e a quantidade de material estéril a ser liberado e transportado. Para que haja essa definição, como foi citado anteriormente, são utilizados modelos juntamente com os dados obtidos na fase da pesquisa mineral.

Este trabalho propõe a comparação entre modelos convencionais (neste trabalho foi escolhido o Método dos Cones Flutuantes) e de Programação Matemática para a definição da cava ótima. Espera-se, com isso, que o modelo escolhido melhore o desempenho e a qualidade dos resultados na definição dessa cava.

Para isso, foram implementados algoritmos computacionais encontrados na literatura usando a linguagem de programação de computadores Pascal (IDE Lazurus). Ferramentas da Pesquisa Operacional também foram utilizadas neste trabalho. Além de facilitar a busca pela cava ótima, ressalta-se o caráter didático-pedagógico dos aplicativos computacionais que foram desenvolvidos.

Como aplicação prática, espera-se que os modelos implementados para a definição da melhor cava em uma mina a céu aberto possam auxiliar na realização deste trabalho de maneira a deixá-lo mais rápido e eficiente, podendo, inclusive, serem utilizados como ferramentas para a tomada de decisões em situações envolvendo cenários reais.

2. OBJETIVOS

2.1. Geral

O objetivo geral deste trabalho foi estabelecer um estudo comparativo entre duas técnicas em 2-D utilizadas para a definição da cava ótima (Método Convencional dos Cones Flutuantes e método baseado em um modelo de otimização) e avaliar os resultados fornecidos por ambos os métodos.

2.2. Específicos

Os objetivos específicos do presente trabalho foram:

- Implementar algoritmos da literatura usando a linguagem de programação Pascal (código e interface implementados na IDE Lazurus) para definir a melhor cava;
- Definir e implementar um modelo de otimização na busca pela cava ótima utilizando o *software* LINGO;
- Comparar os resultados fornecidos pelos dois métodos que foram utilizados para definir a cava ótima;
- Desenvolver ferramentas didático-pedagógicas que auxiliem nos trabalhos relacionados à definição dos limites da cava na fase de planejamento de lavra de uma mina a céu aberto.

3. REVISÃO DA LITERATURA

3.1. Modelo de Blocos

A definição do limite da cava na fase inicial de um empreendimento mineiro determina o tamanho e a forma da mina durante toda a sua existência. Isso delimita a extensão das reservas de minério e a quantidade de material estéril a ser removido e transportado, fornecendo, também, um modelo adequado para a utilização de espaços necessários à instalação de plantas de processamento e escritórios de forma a evitarem-se perdas de recursos financeiros valiosos (Wright, 1990).

Nesse planejamento, segundo Curi (2014), busca-se o lucro máximo que não necessariamente é aquele que máxima a quantidade de minério ou o lucro percentual, mas sim aquele que maximiza o valor presente líquido do projeto como um todo, bem como potencializa o aproveitamento dos recursos minerais.

Para a discretização de um corpo mineral, é realizada uma representação tridimensional em blocos (figura 1). Dessa forma, as informações contidas nesse modelo são estimadas a partir de dados de sondagens e que, para cada bloco, são atribuídas de acordo com técnicas de estimação de reservas.

Segundo Neme *et al* (2011) *apud* Mandarino (2018), o modelo de blocos é definido como um banco de dados espacialmente referenciado a fim de se estimar o volume e a massa do corpo mineralizado bem como, definir as suas dimensões. Além disso, o tamanho de cada bloco é definido de acordo com as propriedades e características do depósito.

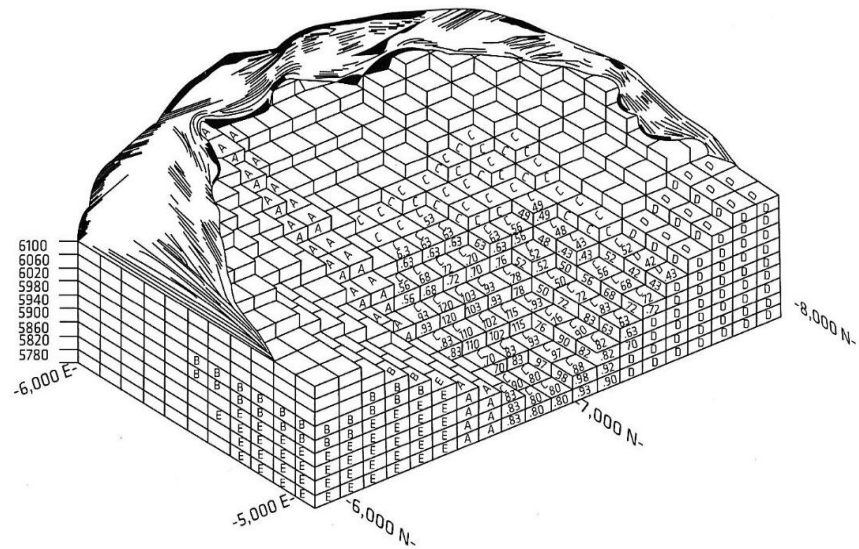


Figura 1 - Exemplo de um modelo de blocos e sua orientação no espaço. Fonte: Curi (2014).

3.2. Métodos computacionais para definição dos limites da cava 2-D

De acordo com Hustrulid *et al.* (2013), o uso dos computadores na elaboração de projetos de mineração permite uma rapidez na atualização dos planos de lavra, além de explorar um grande número de parâmetros em análises sensitivas. Dentre os métodos mais utilizados para a definição dos limites da cava (figura 2), o Método dos Cones Flutuantes (Cones Móveis) foi escolhido para ser utilizado no presente trabalho.

Autor	Manual	Simulação	Programação linear	Programação dinâmica	Teoria dos Grafos	Parametrização
Axelsson (1964)		X				
Lerchs e Grossman (1965)				X	X	
Pana (1965) (Cones móveis)		X				
Meyer (1966)			X			
Erikson (1968)	X					
Fairfield e Leigh (1969)		X				
Johnson e Sharp (1971)				X		
Francois-Bongarçon e Marechal (1976)						X
Lee e Kim (1979)		X				
Koenigsberg (1982)				X		
Wilke e Wright (1984)				X		
Shenggui e Starfield (1985)				X		
Wright (1987)				X		

Figura 2 - Métodos utilizados para obter os limites de cava. Fonte: Wright (1990) *apud* Curi (2014).

3.2.1. Métodos dos Cones Flutuantes

O método dos cones flutuantes está dentre os algoritmos mais utilizados no planejamento de lavra e que permitem uma maior operacionalidade dos dados para criação da cava ótima com resultados diretos (Kennedy, 1990). A figura 3 mostra uma solução típica fornecida por este modelo: nesta figura, para que o Bloco T seja exposto, os blocos t deverão ser lavrados.

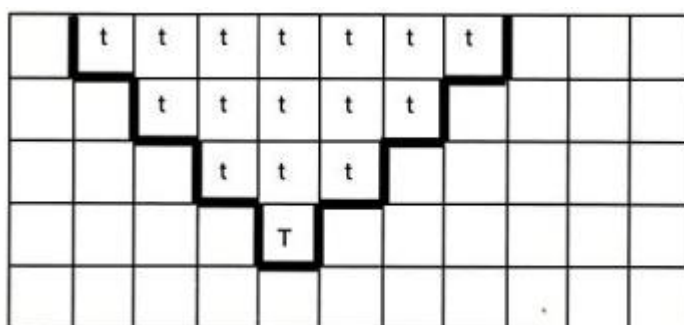


Figura 3 - Seção vertical de um modelo de blocos e o cone indicando os limites da cava. Fonte: Wright, (1990).

Tal modelo consiste no estudo econômico de blocos de minério e estéril que caem dentro de um cone invertido, o qual se move sistematicamente através de uma matriz, com o vértice do cone ocupando, sucessivamente, os centros dos blocos (Chimuco, 2010).

O objetivo, como citado anteriormente, é obter uma cava resultante desse conjunto de cones. Segundo Curi (2014), esses cones são projetados de forma a serem compatíveis com o ângulo geral de talude da cava determinada. Dessa forma, visa-se obter um retorno econômico positivo, ou seja, o somatório dos valores retirados nos cones com os blocos de minério devem superar aqueles resultantes dos blocos de estéril.

Esta técnica pode ser utilizada seguindo-se alguns passos indicados por Curi (2014):

1. O cone é flutuante da esquerda para a direita ao longo do nível superior dos blocos na seção. Se há um bloco positivo ele é removido;
2. Depois da travessia da fileira superior, o cone é movido para a fileira adjacente. Partindo do lado esquerdo, ele flutua da esquerda para a direita parando quando encontra o primeiro bloco positivo. Constrói-se o cone. Se a soma de todos os blocos incluídos dentro do cone é positiva (ou zero), esses blocos são removidos (lavrados). Se a soma é negativa, os blocos são deixados, e o cone flutuante passa para o próximo bloco positivo nessa linha. Esse processo de soma e remoção ou abandono dos blocos é repetitivo;
3. O processo de avanço, regra *top-down*, com o cone flutuante se movendo da esquerda para direita e de cima para baixo da seção, continua até que nenhum bloco possa ser removido;
4. A lucratividade para a seção é encontrada pelo somatório dos valores dos blocos removidos;
5. A razão estéril/ minério na seção pode ser determinada pela razão entre o número de blocos negativos e o número de blocos positivos.

Esses passos podem ser ilustrados conforme a figura 4.

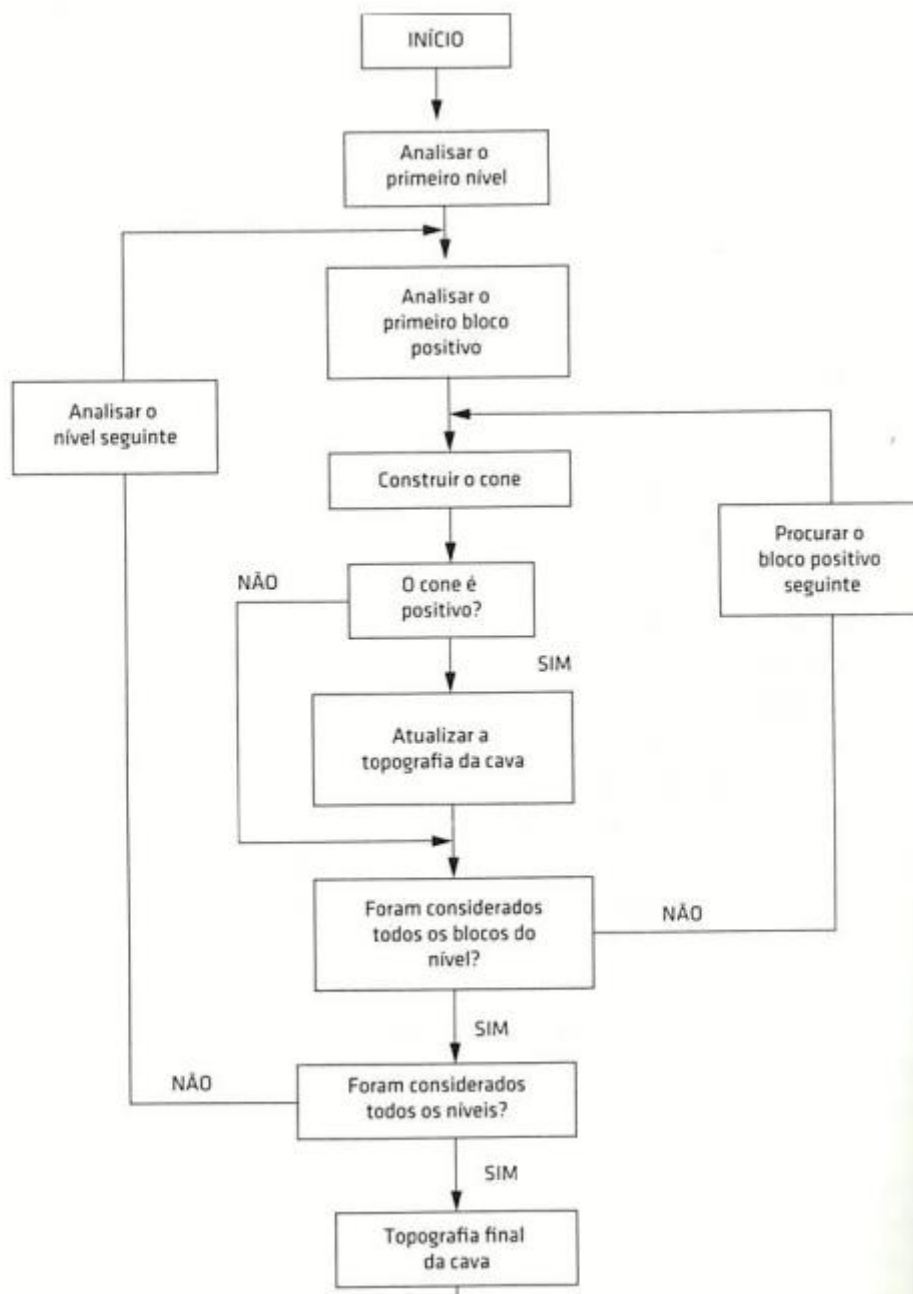


Figura 4 - Etapas para execução do cálculo para o modelo de cones flutuantes. Fonte: Curi (2014).

Para exemplificar a metodologia discutida acima será utilizado o exemplo de Wright (1990), no qual serão mostradas seções verticais de um modelo de blocos com os respectivos valores econômicos conforme a figura 5. O ângulo de talude adotado neste exemplo é de 45° graus.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	-2	-1	-1	-1	2	-1	-1	-2
3	-3	-3	-1	7	-1	-1	-3	-3
4	-4	-4	-4	5	-1	-4	-4	-4

Figura 5 - Seção vertical discretizada em blocos. Fonte: Wright (1990).

A fim de realizar a primeira etapa do processo, procura-se na primeira fila por blocos positivos, ou seja, blocos de minério que possam ser retirados. Essa procura deve ser realizada até que o primeiro bloco possa ser localizado.

Na figura 6, como o primeiro bloco positivo encontrado está na posição (2,5), não é possível retirá-lo sem verificar a viabilidade. Dessa forma constrói-se o cone invertido para verificar o valor total da soma. Nesse caso, o valor é $-3 + 2 = -1$. Portanto esse cone não é retirado:

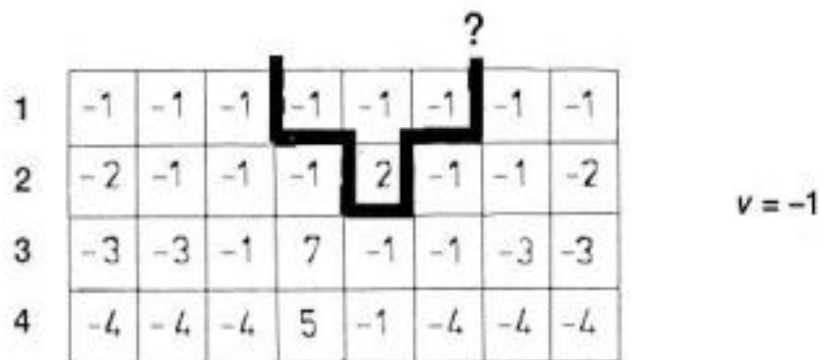


Figura 6 - Primeira verificação do cone invertido em busca de um bloco positivo. Fonte: Wright (1990).

O segundo bloco de minério encontrado está na posição (3,4). Para verificar a viabilidade de sua exploração, forma-se novamente o cone invertido, cuja soma resultante é $-7+2+7 = +2$, o que torna esse bloco minério viável (figura 7).

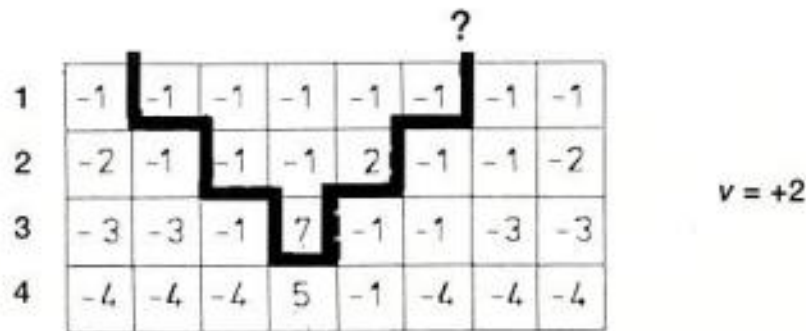


Figura 7 - Segunda verificação do cone invertido para avaliar a viabilidade da exploração do bloco de minério. Fonte: Wright (1990).

O último bloco de minério a ser avaliado encontra-se na posição (4,4). Para esse bloco realiza-se o mesmo processo anterior: $-6+5 = -1$ e, pela mesma razão da situação 2, não é viável ser retirado.

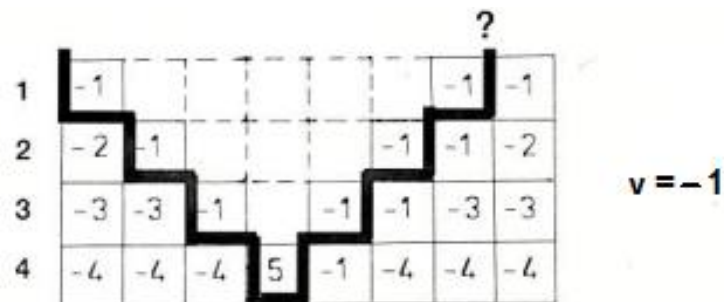


Figura 8 - Terceira verificação do cone invertido. Fonte: Wright (1990).

Assim, pode-se afirmar que a cava, no caso da Figura 8, não é viável. O pit que vai ser economicamente viável é o da figura 7. Ao longo do presente trabalho será possível perceber através de exemplos que esse método possui duas falhas: não garantir que o valor máximo da cava ótima seja encontrado e de não reavaliar um cone cujo valor econômico foi negativo na primeira iteração.

3.2.2. Método de Lerschs e Grossman

Com o objetivo de melhorar e otimizar as informações do corpo de minério, em 1965 foi desenvolvido um algoritmo pelos estudiosos Helmut Lerchs e Ingo F. Grossmann que, segundo Carmo (2001) trouxe uma verdadeira revolução em otimização de aberturas de cavas de minas.

Isso aconteceu devido ao método bidimensional ter como objetivo resolver problemas de máximo fluxo em fechamento de grafos e ao mesmo tempo o problema de corte mínimo (Carmo, 2001). Além disso, de acordo com Kennedy (1990), o algoritmo ainda permite acabar com o processo de tentativa e erro para criação da cava, o que torna o processo mais rápido e eficiente.

Conforme (Carmo, 2001), para resolução de problemas usando esse sistema é necessário seguir alguns passos:

1. Após a discretização da jazida em blocos tecnológicos apropriadamente avaliados, para cada bloco (i, j), de linha i e coluna j, define-se a quantidade $m_{ij} = v_{ij} - c_{ij}$; De acordo com o mesmo autor, trata-se do benefício de cada bloco, ou seja, são as receitas (v_{ij}) menos os custos (c_{ij}).
2. Calcula-se o valor M_{ij} acumulado para cada coluna considerada, ou seja:

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^i m_{kj}$$

3. Procura-se o caminho ótimo que represente o contorno da cava para a seção considerada. Na procura desse caminho, são utilizadas as relações abaixo:

$P_{0j} = 0 \rightarrow$ adiciona-se uma primeira linha ao conjunto de blocos, sendo esta composta apenas por zeros;

$$P_{ij} = M_{ij} + \max_k \{P_{i+k, j-1}\} \quad \text{com } k = -1, 0, +1; \text{ no caso do ângulo de talude } 45^\circ$$

$$P_{max} = \max_k P_{ik}.$$

Assim a otimização ocorrerá se os passos forem seguidos, sendo importante notar que:

- i. P_{ij} representa a contribuição máxima possível das colunas 1 a j , para qualquer pit viável que contenha o elemento (i,j) ;
- ii. Caso o valor máximo de P_{ij} na primeira linha seja positivo, então a cava ótima é obtida seguindo-os os arcos da direita para a esquerda;
- iii. Com pequenos ajustes manuais é possível obter a cava final ótima 3D.

Para demonstrar o que foi abordado acima e ilustrar como funciona esse método 2D, será utilizado o exemplo de Curi (2014), o qual foi adaptado do projeto apresentado por Lerschs e Grossman. Neste exemplo, serão mostradas seções verticais de um modelo de blocos equidimensional com valores econômicos M_{ij} .

Nesse caso foi adotado o ângulo de talude 45° a efeito de simplificação, pois pode-se afirmar que o processo de otimização é condicionado à escolha dos ângulos de talude da cava, assim qualquer mudança nos ângulos de talude exige modificações no número de combinações para selecionar os blocos.

Na primeira seção (figura 9), tem-se uma seção vertical de um modelo de blocos.

-1	-2	-1	-2	-1	-1	-1	-1
	-2	-2	-2	-1	-2	-1	
		+12	-2	-4	+9		

Figura 9 - Seção vertical da jazida discretizada em blocos. Fonte: Curi (2014).

Nessa figura 10, tem-se a matriz M_{ij} dos valores dos blocos acumulados.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1	-2	-1	-2	-1	-1	-1	-1	
		-4	-3	-4	-2	-3	-2		
			+9	-6	-6	+6			

Figura 10 - Seção vertical da figura 9 com os valores acumulados de M_{ij} e a primeira linha acrescida de zeros. Fonte: Curi (2014).

A figura 11 mostra a seção vertical com os valores P_{ij} . As setas representam o caminho ótimo a ser percorrido para o cálculo do contorno da cava considerada.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1
	-1	-2	-1	-2	-1	-1	-1	+1	
		-5	-5	0	-2	-4	+2		
			+4	-2	-6	+4			

Figura 11 - Seção anterior (figura 10) com os valores calculados de P_{ij} . Fonte: Curi (2014).

Na última seção representada, figura 12, tem-se a cava final otimizada e com o seu valor de +1.

-1	-2	-1	-2	-1	-1	-1	-1
	-2	-2	-2	-1	-2	-1	
		+12	-2	-4	+9		

Figura 12- Cava Final otimizada com os valores originais. Fonte: Curi (2014).

3.3. Métodos de Programação Matemática

A pesquisa operacional, segundo Hillier e Lieberman (2010), teve um grande impacto na melhoria da eficiência em diversas organizações espalhadas em todo globo. Sua origem como atividade organizacional se deu através das iniciativas militares no começo da Segunda Guerra Mundial, em que teve como demanda a necessidade de alocar tropas e suprimentos escassos de forma eficiente para evitar desperdícios.

Esse novo campo pôde auxiliar o aumento da produtividade de diversos países, assim como ajudou a fomentar ainda mais a economia das grandes potências mundiais. Hoje a PM é utilizada para resolver diversos modelos matemáticos nas mais diversas áreas, os quais, de acordo com Taha (2008), tem como meta “otimizar” um critério objetivo específico sujeito a um conjunto de restrições.

Na prática, no setor da mineração esses modelos podem ser utilizados no planejamento operacional de lavra em curto prazo e na definição dos limites da cava ótima em minas a céu aberto.

Pode-se dizer que a técnica mais utilizada dentro desse campo de estudo é a Programação Linear (PL), em que é aplicada em modelos cujas funções objetivo e restrições são de forma, como nome sugere, linear. Outras técnicas que podemos citar são: a programação inteira (na qual as variáveis assumem valores inteiros), a programação inteira mista, a programação dinâmica (na qual o modelo original pode ser decomposto em subproblemas mais fáceis de tratar), a otimização em rede (na qual o problema pode ser modelado como uma rede) e a programação não linear (na qual as funções do modelo são não lineares) (Taha, 2008).

A PL, conforme abordado por Costa (2005), consiste na maximização ou minimização de uma função linear, denominada função objetivo, respeitando um sistema linear de igualdades ou desigualdades que recebem o novo modelo de restrição. Em situações que demandam a resolução de problemas por essa técnica busca-se sempre a melhor solução ou solução ótima, que é aquela que maximiza ou minimiza a função linear.

Essa solução é obtida ao equacionar o problema através de um modelo, que de acordo com Costa (2018), pode ser definida como qualquer especificação de valores para as variáveis de decisão, independente se ela for desejável ou admissível. Ainda segundo o autor, existem três tipos de soluções: a viável, a inviável e a ótima. A primeira é aquela em que todas as restrições

são satisfeitas, porém não significa que seja a melhor delas. A solução inviável é caracterizada por não atender pelo menos uma das restrições. A terceira solução é aquela em que o valor da função objetivo é maximizado ou minimizado.

Para ilustrar um problema genérico de PL pode-se utilizar um formato padrão com **m** restrições e **n** variáveis e que, segundo Bazaraa *et al.* (1990) *apud* Fogliatto (2009), tem a seguinte forma:

Maximizar (ou minimizar):

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$$

Sujeito a:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \leq b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \geq b_2$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

$$b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \dots, b_n \geq 0$$

Ainda segundo o autor Bazaraa *et al.* (1990) *apud* Fogliatto (2009), existem algumas características desse formato que são: (i) a função objetivo pode ser do tipo maximizar ou minimizar; (ii) todas as restrições do modelo são expressas em equações ou inequações; (iii) todas as variáveis são não-negativas; (iv) as constantes no lado direito das restrições são não negativas.

Para resolver problemas de otimização com números maiores de informações usam-se os recursos de algumas linguagens de modelagem, ou seja, *softwares* de programação que auxiliam o processamento e formulação dessas informações em grande escala e de forma rápida.

Entre as mais utilizadas, pode-se citar o LINGO que permite ao usuário formular eficientemente um modelo de forma concisa e clara, além disso, segundo Costa (2005), essa

ferramenta possibilita a integração com planilhas eletrônicas, as quais são muito utilizadas em tomada de decisões no campo da mineração.

4. METODOLOGIA

A metodologia empregada no presente trabalho foi realizada através da implementação de dois algoritmos com a intenção de resolver o problema de otimização do pit. Em um primeiro momento, utilizou-se o método dos cones flutuantes através do *software* MCDesign. O segundo algoritmo elaborado foi através dos métodos de PM, em que foi utilizado com o *software* LINGO.

Para atingir um dos objetivos e comparar as duas situações, foi utilizado o mesmo exemplo de modelo de blocos retirado de Wright (1990) mostrado na figura 13.

-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
-6	5	5	5	5	5	5	-6
-7	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
-8	-8	-8	3	-8	-8	-8	-8

Figura 13 - Modelo de blocos para comparação dos métodos. Fonte: Wright (1990).

4.1. Método dos Cones Flutuantes - *Software* MCDesign

Nessa primeira etapa do trabalho foi implementado um algoritmo de otimização utilizando o *software* Lazarus, possibilitando a resolução de problemas com modelos de blocos. A escolha do *software* foi feita por ser tal aplicativo um compilador de fácil acesso e de relativa simplicidade de implementação dos códigos.

Esse procedimento desenvolveu-se da seguinte forma: primeiro criou-se um código que pôde ser implementado na linguagem escolhida obedecendo todas as etapas de verificação manual do método de otimização. Ao mesmo tempo, foi criado o aplicativo para estabelecer a cava final, obter o valor total do cone e calcular a relação estéril minério.

A interface desenvolvida para o aplicativo é mostrada na figura 14.



Figura 14 - Interface do aplicativo MCDesign.

Dessa forma, o aplicativo possibilita ao usuário encontrar alguns parâmetros que podem ser obtidos realizando algumas etapas. Em um primeiro momento, o usuário deve determinar o tamanho do modelo de blocos a ser testado, que pode conter no máximo 10 linhas e 15 colunas. Isso pode ser feito através do campo indicado na figura 15. Após a escolha do número adequado, deve-se selecionar o botão “Mostrar Blocos” para ativar a nova matriz desejada.

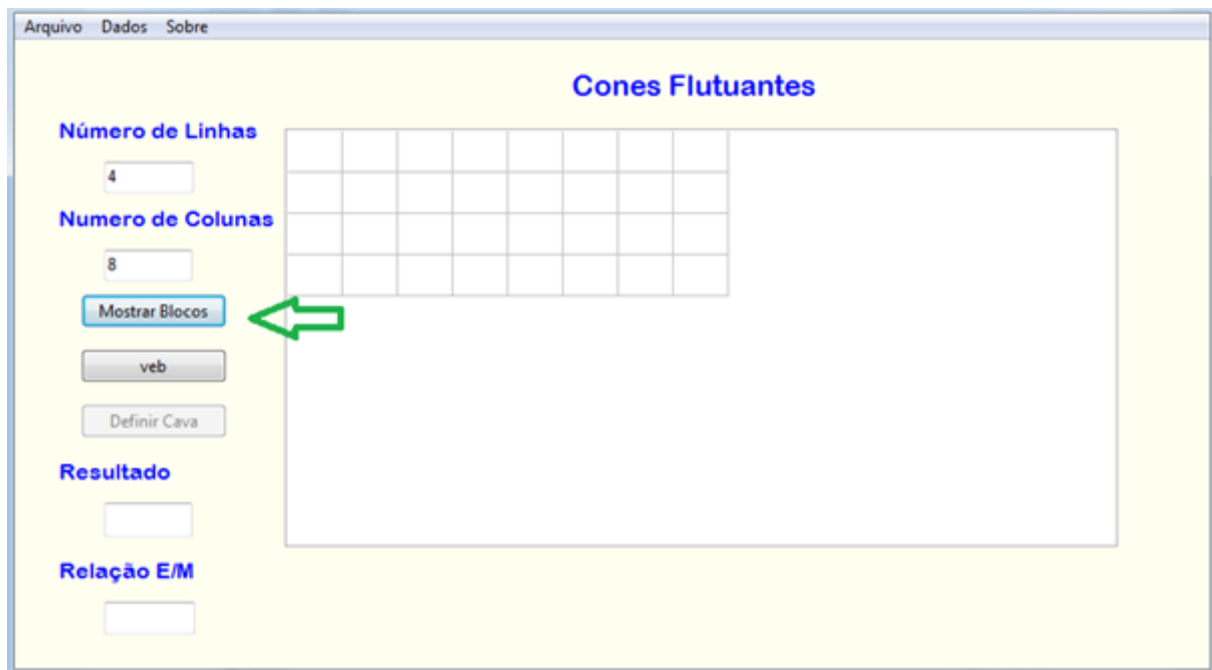


Figura 15 – Campo utilizado para se estabelecer as dimensões do modelo de blocos.

Para o número máximo de linhas e colunas permitido, a área de visualização deve ficar conforme mostrado pela figura 16.



Figura 16 - Exemplo de uma Matriz 10 x 15 no aplicativo MCDesign.

A segunda etapa do processo consiste em colocar os valores econômicos de cada bloco em suas respectivas células. Para isso deve-se apenas selecionar e digitar o valor determinado de cada bloco. Posteriormente, é preciso que o aplicativo leia os dados fornecidos na tabela através do botão “veb” (figura 17).

Cones Flutuantes

Número de Linhas
4

Número de Colunas
8

Mostrar Blocos

veb

Definir Cava

Resultado

Relação E/M

-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
-6	5	5	5	5	5	5	-6
-7	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-7
-8	-8	-8	3	-8	-8	-8	-8

Figura 17 – Botão para leitura do valor econômico dos blocos.

Para a última etapa, é preciso selecionar o botão “definir cava”, o que possibilita determinar o desenho do novo pit e encontrar o valor total dos blocos positivos no campo “Resultado” conforme ilustrado pela figura 18.

Arquivo Dados Sobre

Cones Flutuantes

Número de Linhas

Numero de Colunas



Resultado
 

Relação E/M

							-2
-6						5	-6
-7	-2				-2	-2	-7
-8	-8	-8		-8	-8	-8	-8

Figura 18 – Procedimento definir cava.

Além disso, foi calculada a relação estéril/minério, sendo interpretada, neste trabalho, como o número de blocos com $veb < 0$ que devem ser lavrados para a retirada de um bloco com $veb \geq 0$. Esse parâmetro é importante, pois pode auxiliar na verificação da viabilidade de um determinado empreendimento. O valor encontrado é mostrado na figura 19.

Arquivo Dados Sobre

Cones Flutuantes

Número de Linhas

Numero de Colunas

Resultado

Relação E/M
 

							-2
-6						5	-6
-7	-2				-2	-2	-7
-8	-8	-8		-8	-8	-8	-8

Figura 19 - Resultado para Relação E/M

Por último, o programa ainda permite ao usuário salvar o projeto anterior para que informações não sejam perdidas. Para isso, basta selecionar a opção “dados” e, em seguida, selecionar “salvar”. Além disso, também propicia ao usuário abrir um projeto salvo anteriormente que está localizado no campo “dados”. Esses procedimentos são ilustrados na figura 20.

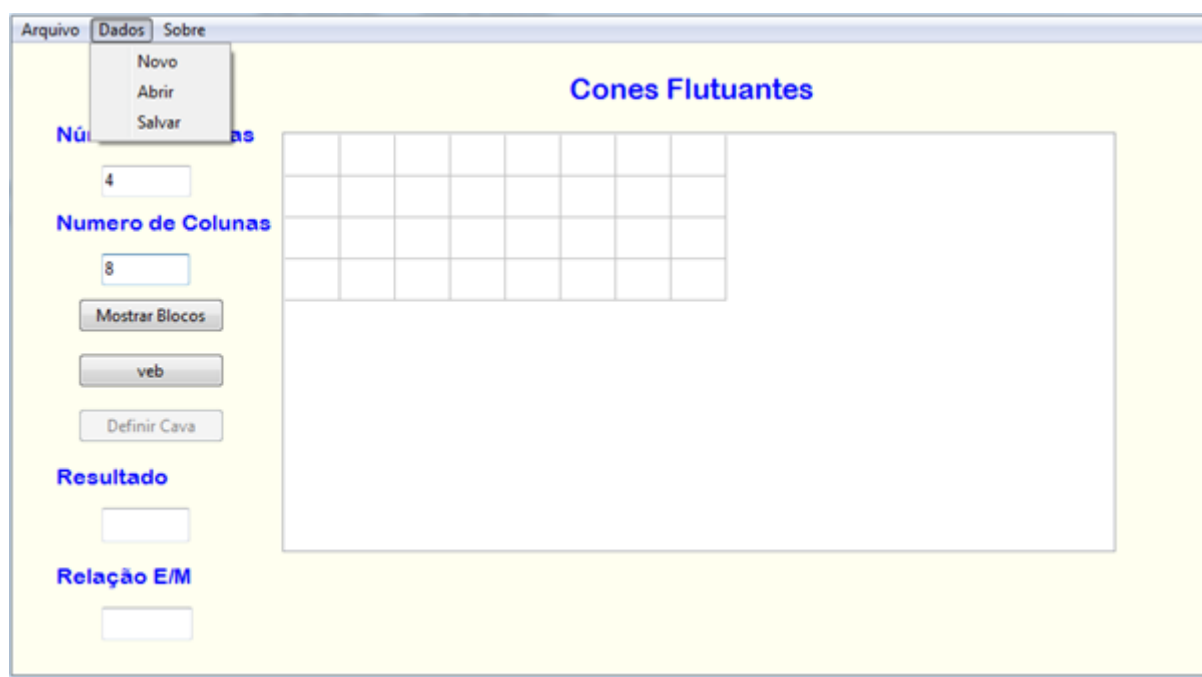


Figura 20 – Opção para abrir e salvar dados.

Outra possibilidade que visa resolver o problema dos cones lavráveis sobressalentes após a primeira iteração, é a possibilidade de fazer o *re-test*, ou simplesmente um segundo teste. Para isso, basta selecionar o botão “definir cava” e conferir o resultado.

4.2. Método Programação Matemática – *Software LINGO*

A segunda etapa do trabalho foi gerar um algoritmo através dos métodos de PM. Por se tratar de um problema de programação linear foi escolhido o software LINGO.

O procedimento nesse caso desenvolveu-se de uma forma similar ao primeiro, ou seja, foi elaborado um código para resolver o problema. Em seguida, com o auxílio de uma ferramenta

do próprio compilador, utilizou-se o software Excel para criar um ambiente de visualização da cava encontrada.

O modelo gerado nesse estudo tem como meta principal maximizar a função objetivo, isto é, potencializar o lucro com a retirada dos blocos de minério da mina e pode ser detalhado da seguinte forma:

Dados de entrada:

L	conjunto das linhas no modelo de blocos 2-D
C	conjunto das colunas no modelo de blocos 2-D
ncol	número de colunas sendo consideradas as colunas de blocos fantasmas
vebs _{ij}	valor econômico do bloco na linha <i>i</i> e coluna <i>j</i> no modelo 2-D

Variável de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o bloco na linha } i \text{ e coluna } j \text{ será lavrado;} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A forma literal do modelo de otimização é:

Função Objetivo:

$$\max \sum_{i \in L; j \in C} x_{ij} \times vebs_{ij} \quad (4.1)$$

Sujeito a:

$$x_{ij} - x_{i-1,j-1} \leq 0 \quad \forall i > 1, j > 1 \quad (4.2)$$

$$x_{ij} - x_{i-1,j} \leq 0 \quad \forall i > 1, j > 1 \quad (4.3)$$

$$x_{ij} - x_{i-1,j+1} \leq 0 \quad \forall i > 1, j > 1, j < ncol \quad (4.4)$$

$$x_{i,1} = 0 \quad \forall i > 1 \quad (4.5)$$

$$x_{i,ncol} = 0 \quad \forall i > 1 \quad (4.6)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in L, j \in C \quad (4.7)$$

A relação (4.1) estabelece a função objetivo do modelo, no qual se pretende maximizar a soma dos valores econômicos dos blocos lavrados. As restrições (4.2), (4.3) e (4.4) asseguram que para que um bloco (i, j) seja exposto, os blocos $(i-1, j-1)$, $(i-1, j)$ e $(i-1, j+1)$ devem ser lavrados. As equações (4.5) e (4.6) garantem que os blocos fantasmas das colunas 1 e $ncol$ não serão lavrados. O domínio da variável binária x é estabelecido na relação (4.7).

Dessa forma, o modelo acima implementado no *software* lingo poder ser visualizado na figura 21.

```

/
Model:
Title: CavaOtima;

Sets:
linha;;
coluna;;
matriz(linha,coluna): x, vebs;
Endsets

Data:
linha = @OLE('Veb2.xlsx', 'linha');
coluna = @OLE('Veb2.xlsx', 'coluna');
vebs = @OLE('Veb2.xlsx', 'vebs');
Enddata

!Função Objetivo;
[FO] Max = @sum(Matriz(i,j): X(i,j)*Vebs(i,j));

@for(Matriz(i,j)|i#gt#1#and#j#gt#1: x(i,j)- X(i-1,j-1) <= 0);
@for(Matriz(i,j)|i#gt#1#and#j#gt#1: x(i,j)- X(i-1,j) <= 0);
@for(Matriz(i,j)|i#gt#1#and#j#gt#1#and#j#lt#@size(coluna): x(i,j)- X(i-1,j+1)<= 0);

!Condições de contorno;
@for(Matriz(i,j)|i#gt#1: x(i,1)= 0);
@for(Matriz(i,j)|i#gt#1: x(i,@size(coluna))= 0);

!A variável x é binária;
@for(Matriz(i,j): @bin(x));

Data:
@ole('Veb2.xlsx','X','FO') = X, FO;
Enddata

End

```

Figura 21 - Modelo do exemplo utilizado para otimização da cava.

Na figura 22, é possível notar o resultado obtido com o modelo de otimização implementado.

Método da Programação Matemática: Lingo/Excel										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	0
3	0	-6	5	5	5	5	5	5	-6	0
4	0	-7	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-7	0
5	0	-8	-8	-8	3	-8	-8	-8	-8	0

Figura 22 - Ambiente auxiliar no Excel representando o modelo de blocos.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1. Cones Flutuantes

Como esperado, o método escolhido para esse estudo possui algumas limitações em sua estrutura. A primeira é que ele não identifica quando o cenário ótimo é encontrado, ou seja, não garante que a solução possui o valor máximo para o lucro através da retirada dos blocos de minério.

A segunda limitação consiste em não avaliar possíveis cones de minério que em um primeiro momento não podem ser lavráveis por não atenderem as exigências propostas pelo método. Porém, no decorrer da avaliação posterior dos blocos, fica claro que esse(s) cone(s) poderia(m) ser lavrado(s).

Apesar dessas limitações conhecidas, o aplicativo criado tem uma grande relevância porque além de auxiliar no cálculo de forma mais rápida, ele também permite uma nova iteração, ou seja, resolver o problema dos cones sobressalentes na primeira parte processo, o que possibilita melhorar a solução encontrada.

5.2. Primeira iteração

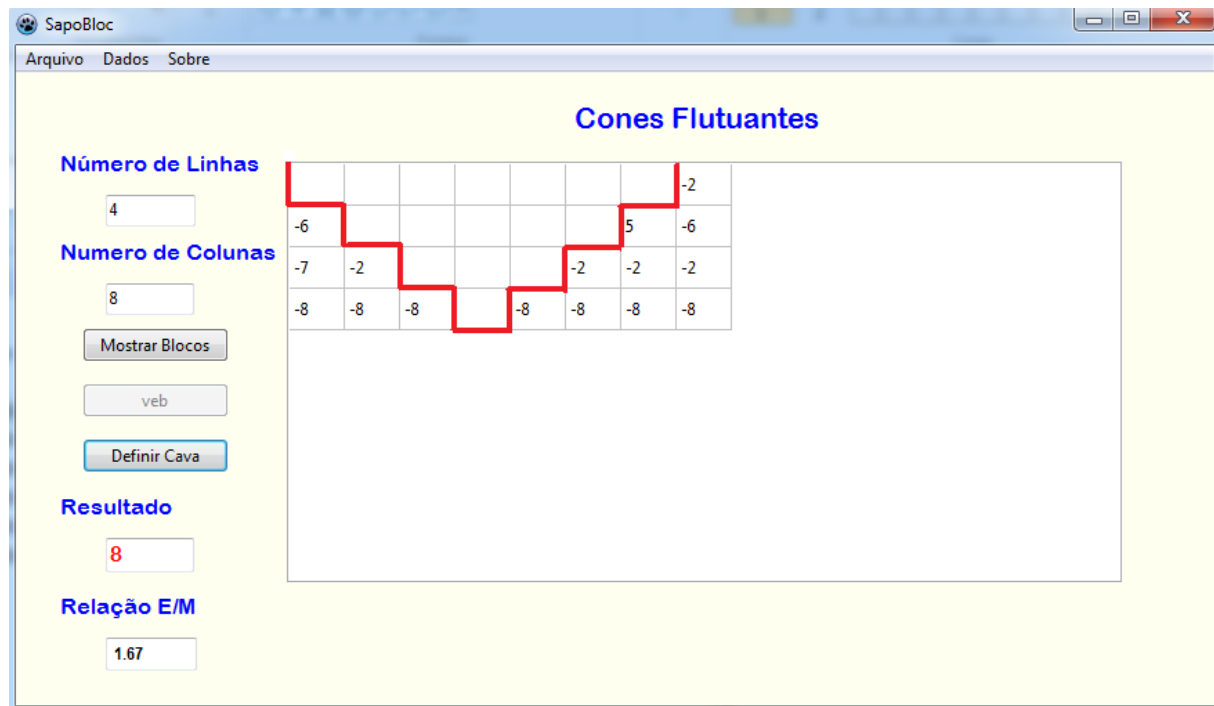


Figura 23- Cava Calculada na primeira iteração do aplicativo dos cones flutuantes.

Nesta iteração, pode ser observado que o valor parcial encontrado no cone foi de: +8. Isso significa que esse valor pode ser considerado viável, porém não é o ótimo, o qual será atingido no próximo método.

5.3. Segunda iteração

O modelo de blocos resultante da primeira iteração possui uma limitação que pertence ao próprio método. Nota-se que na figura 24, ainda existe um cone que pode ser lavrado.

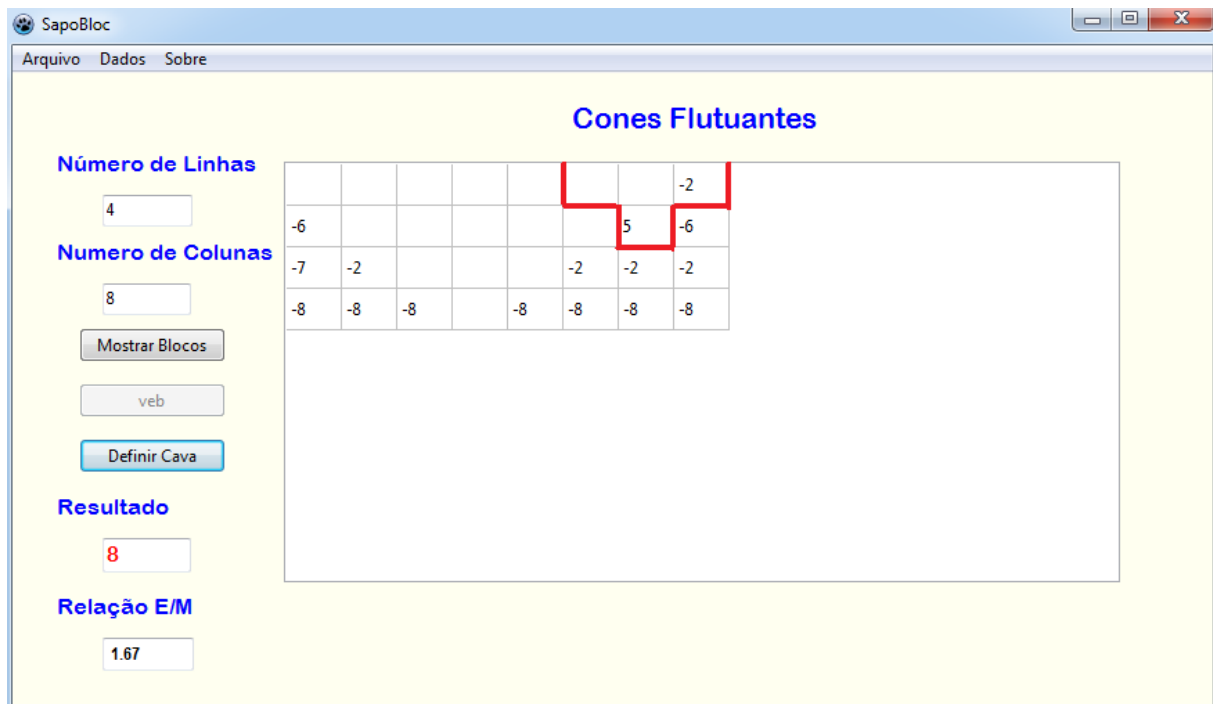


Figura 24 - Modelo de blocos resultante da primeira iteração.

Para corrigir essa limitação abordada anteriormente foi realizado o *re-test* em que o valor total encontrado foi de: + 11. Esse valor também é viável e um pouco mais próximo do ótimo, porém ainda não maximiza a função objetivo, que é de +14.

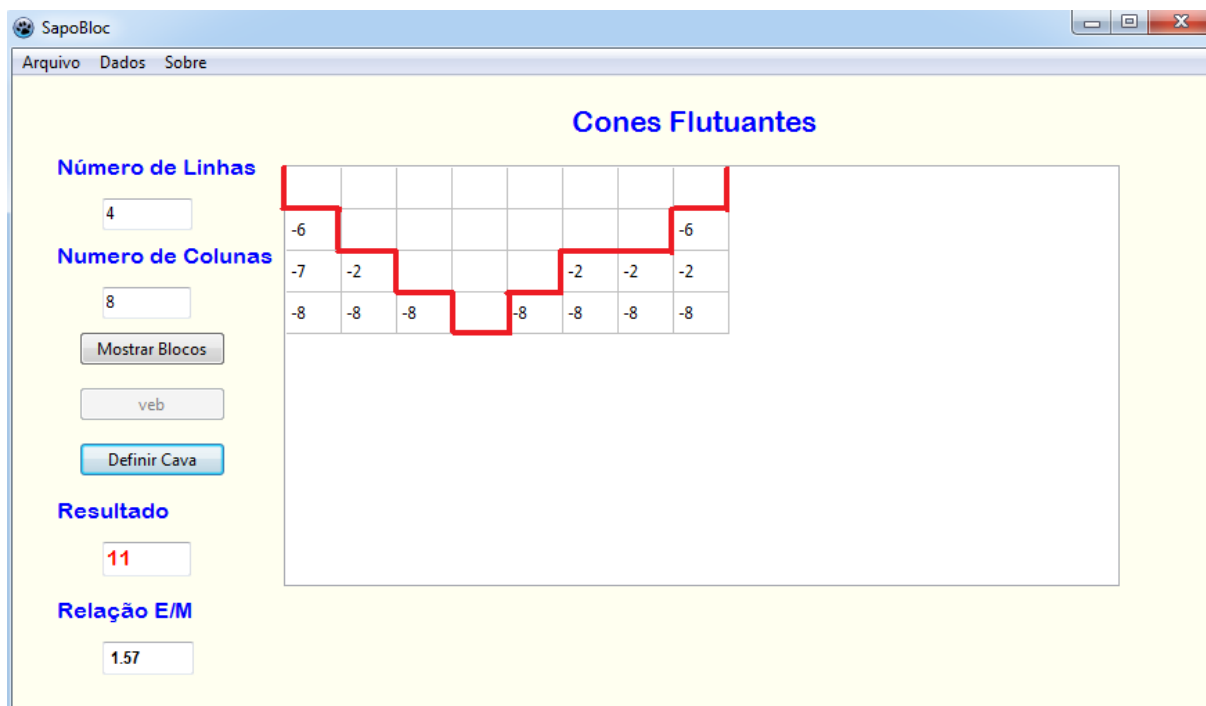


Figura 25 - Cava calculada na segunda iteração do aplicativo dos cones flutuantes.

5.4. Relação Estéril/Minério

A relação Estéril/Minério é outro parâmetro importante para auxiliar a determinação do limite final de uma cava em um empreendimento minério. Dessa forma ao comparar os resultados das duas iterações foi obtido os seguintes valores:

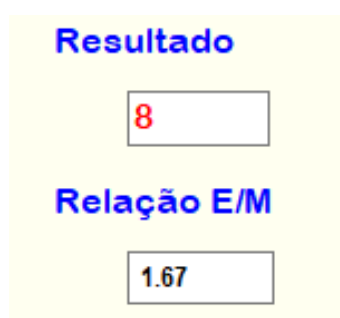


Figura 26 - Resultado relação Estéril/Minério 1ª iteração.

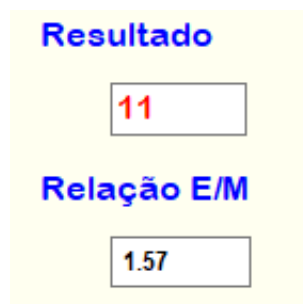


Figura 27 - Resultado relação Estéril/Minério 2ª iteração.

Comparando os dois valores apresentados, pode-se inferir que a segunda apresenta um valor menor, ou seja, a quantidade de estéril a ser removida no primeiro caso é maior.

5.5. Programação matemática

Como foi dito anteriormente, essa abordagem permite encontrar um valor que maximize o lucro com a retirada dos blocos de minério. Além disso, outra vantagem é poder trabalhar com um modelo de blocos de maiores dimensões e que se aproxime mais da realidade encontrada na indústria.

Na figura 28, encontra-se a cava ótima para o problema determinado acima:

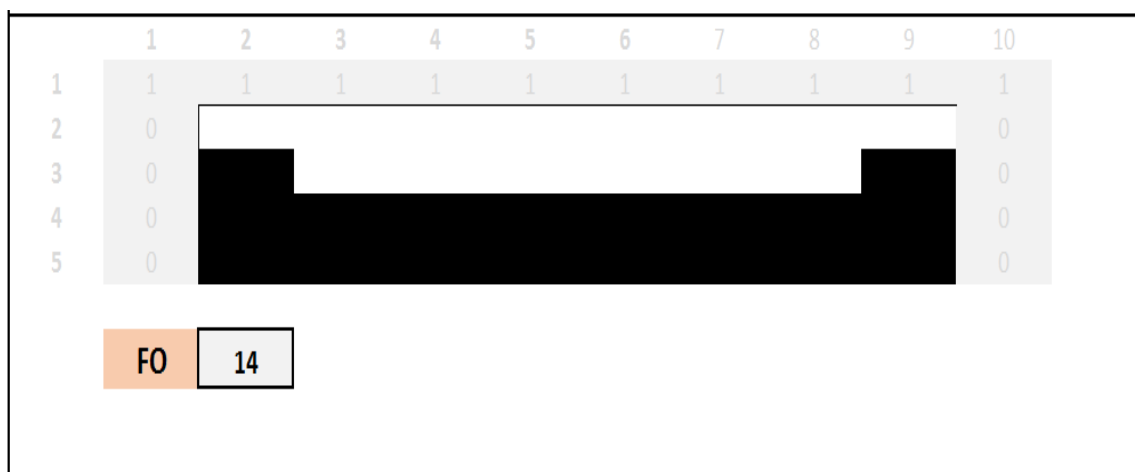


Figura 28 - Cava Ótima fornecida pelo modelo de otimização.

O valor resultante da soma dos blocos dentro da cava foi de +14. De acordo com o próprio *software*, o valor encontrado é considerado como a solução ótima.

6. CONCLUSÕES

Em um primeiro momento, utilizou-se o método convencional dos cones flutuantes para resolver o exemplo proposto e, a partir da análise dos resultados obtidos, foi possível encontrar dois cenários: na primeira iteração o valor total foi de +8; na segunda iteração o valor encontrado foi de +11.

Essa diferença ocorreu após a realização do *re-test*, sendo possível superar uma das limitações do método. Essa possibilidade é muito relevante para o trabalho, pois permite que o valor encontrado seja melhorado.

Na segunda etapa, na qual utilizou-se o modelo de programação matemática, foi encontrado o resultado de +14 para o mesmo problema, o qual é considerado como o valor ótimo, assim maximizando o lucro obtido para o desenho do limite da cava. Neste caso, pode-se concluir que o método da Programação Matemática fornece um resultado melhor em comparação com o método convencional dos cones flutuantes.

Além disso, pode-se analisar outras características dos programas desenvolvidos como o tamanho do código implementado. Assim, é razoável afirmar que o MC apresenta dimensão consideravelmente maior. Isso é possível mensurar através da comparação do número de linhas de cada código: o primeiro apresenta 293 linhas, em contrapartida, o segundo apresentou 35 linhas.

Portanto, o presente trabalho foi importante em alguns aspectos como a possibilidade de compreender melhor os métodos estudados e identificar quais suas principais características. Assim, foi possível compreender que o método de PM fornece soluções nas quais é possível identificar a ótima.

REFERÊNCIAS

BAZARAA, M.S., JARVIS, J.J. & SHERALI, H.D. **Linear Programming and Network Flows**, 2nd Ed. New York. 1990.

CHIMUCO, J. P. J. **Metodologia de planejamento de mina para retomada das operações de lavra das jazidas de kassinga norte – angola**. Dissertação (Engenharia de Minas), Ouro Preto, 2010. Disponível em: https://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/3237/1/DISSERTA%C3%87%C3%83O_MetodologiaPlanejamentoMina.pdf. Acesso em: 28 abr. 2019.

COSTA, F. P. **Aplicações de técnicas de otimização a problemas de planejamento operacional de lavra em minas a céu aberto**. Dissertação (Engenharia de Minas), Ouro Preto, 2005.

COSTA, H. C. **Programação Linear**. IBMEC/MG, 2018. Disponível em: <https://rpubs.com/hudsonchavs/linearprogramming>. Acesso em 24 junho 2019.

CURI, A. **Minas A Céu Aberto - Planejamento de Lavra**. Oficina de Textos, São Paulo, 2014.

FOGLIATTO, F. **Apostila Pesquisa Operacional**. Porto Alegre, 2009. Disponível em: http://www.facom.ufms.br/~ricardo/Courses/OR-2009/Materials/PO_Grad_01.pdf. Acesso em: 12 maio 2019.

HILLIER, F. S; LIEBERMAN, G. J. **Introdução a pesquisa operacional**. AMGH editora Ltda, 2010.

HUSTRULID, W.; KUCHTA, M.; MARTIN, R. **Open pit mine: planning & design**. 3rd ed., CRC Press, Leiden, 2013.

KENNEDY, B. A. **Surface Mining**. Society Mining, metallurgy, and Exploration, inc, Littleton, 1990.

MANDARINO, M. F. **Análise de métodos para planejamento de curto prazo: uma abordagem para o line up**. Trabalho de conclusão de curso (Engenharia de Minas), Ouro Preto, 2018.

TAHA, H. A. **Pesquisa operacional: uma visão geral**. 8ª ed., Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2008.

WRIGHT, E. A. **Open Pit Mine design Models - An introduction with Fortran/77 Programs**. Trans Tech Publications, Berlin, 1990.

CARMO, F. A. R. **Metodologias para o Planejamento de Cavas Finais de Minas a Céu Aberto Otimizadas**. 2001. 135 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mineral) - Departamento de Engenharia de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2001.