



**UFOP**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO – UFOP**  
**ESCOLA DE MINAS**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE MINAS**



**VINÍCIUS TAVARES DE LANNA ROCHA**

**BALANÇO REDUNDANTE DE MASSAS  
EM CIRCUITO DE CONCENTRAÇÃO MAGNÉTICA**

**OURO PRETO - MG**  
**2019**

**VINÍCIUS TAVARES DE LANNA ROCHA**  
**vinciustlanna@hotmail.com**

**BALANÇO REDUNDANTE DE MASSAS  
EM CIRCUITO DE CONCENTRAÇÃO MAGNÉTICA**

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Engenharia de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito para a obtenção do título de Engenheiro de Minas.

**Professor orientador:** José Aurélio Medeiros da Luz

**OURO PRETO – MG**  
**2019**

R672b Rocha, Vinícius Tavares de Lanna.  
Balanço redundante de massas em circuito de concentração magnética  
[manuscrito] / Vinícius Tavares de Lanna Rocha. - 2019.

33f.: il.: color; tabs.

Orientador: Prof. Dr. José Aurélio Medeiros da Luz.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia de Minas.

1. Beneficiamento de minério. 2. Minas e recursos minerais - Processamento. 3. Fechamento de minas - Resíduos. I. Luz, José Aurélio Medeiros da. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 622.778



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Escola de Minas - Departamento de Engenharia de Minas

## ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos 16 dias do mês de julho de 2019, às 09h00min, no auditório do Departamento de Engenharia de Minas da Escola de Minas - DEMIN/EM, foi realizada a defesa do Trabalho de Conclusão de Curso de Engenharia de Minas requisito da disciplina MIN-491 – Trabalho de Conclusão de Curso II, intitulado “*BALANÇO REDUNDANTE DE MASSAS EM CIRCUITO DE CONCENTRAÇÃO MAGNÉTICA*”, pelo aluno **Vinicius Tavares de Lanna Rocha**, sendo a comissão avaliadora formada por **Prof. Dr. José Aurélio Medeiros da Luz (orientador)**, **Prof. Dr. Vladimir Kronemberger Alves** e **M.Sc. Felipe de Orquiza Milhomem**.

Após arguição sobre o trabalho, a comissão avaliadora deliberou por unanimidade pela aprovação do candidato, com a nota 9,3, concedendo-lhe o prazo de 15 dias para incorporar no texto final da monografia as alterações determinadas/sugeridas pela banca.

O aluno fará jus aos créditos e conceito de aprovação na disciplina MIN-491 – Trabalho de Conclusão de Curso II após o depósito, no site do Repositório UFOP, da versão final da monografia defendida, conforme modelo do CEMIN-2009, no Colegiado do Curso de Engenharia de Minas – CEMIN.

Para fins de registro, foi lavrada a presente ata que, depois de lida e aprovada é assinada pelos membros da comissão avaliadora e pelo discente.

Ouro Preto, 16 de julho de 2019.

Prof. Dr. José Aurélio Medeiros da Luz  
Presidente da Comissão Avaliadora e Orientador

Prof. Dr. Vladimir Kronemberger Alves  
Membro da Comissão Avaliadora

M.Sc. Felipe de Orquiza Milhomem  
Membro da Comissão Avaliadora

Vinicius Tavares de Lanna Rocha

Prof. M.Sc. José Fernando Miranda  
Professor responsável pela Disciplina Min 491 – Trabalho de Conclusão de Curso

Esta conquista eu dedico aos meus pais e meus irmãos.

## AGRADECIMENTO

Agradeço à Deus por me guiar e abençoar minha caminhada com as oportunidades que tive.

Agradeço imensamente aos meus pais Elídia e Moisés, assim como toda família, por me apoiarem incondicionalmente em meus objetivos, ensinar-me os valores indispensáveis para a vida, a educação e o amor.

Agradeço aos meus irmãos, Rodrigo, Pedro e Arthur, por serem meus fiéis companheiros em quaisquer desafios e alegrias.

Agradeço ao meu padrinho Clodomir pelos conselhos e amizade.

Agradeço à Tatiane pelo amor e companheirismo.

Agradeço aos amigos que participaram dessa caminhada, que foram de extrema importância.

Agradeço à República Serigy, que se tornou minha segunda casa.

Agradeço aos mestres da Escola de Minas e DEMIN pelo ensino e disponibilidade.

Agradeço ao professor José Aurélio Medeiro da Luz pela orientação nesse trabalho.

Agradeço ao João Carlos Vieira pela motivação e ensinamentos.

Agradeço à empresa Minérios Nacional pela oportunidade concedida e o aprendizado proporcionado.

*“Não basta termos um bom espírito, o mais importante é aplicá-lo bem.”*

*René Descartes*

## RESUMO

O controle operacional de uma usina de tratamento mineral passa pelo balanço de massas, que é a aplicação do princípio da conservação de massa. Ele determina as vazões e os teores dos componentes presentes num processo, dados de relevância para monitoramento e controle do beneficiamento do minério. O trabalho teve como objetivo determinar o balanço de massas de um circuito de concentração magnética de minério de ferro, além das recuperações mássica e metalúrgica com os valores devidamente ajustados, aproveitando-se a redundância de dados adquiridos do processo. O minério fino que alimenta a usina em estudo, possui por volta de 42 % de ferro e é proveniente de pilhas de material tratado como rejeito por minerações anteriores. A planta em questão possui nível de controle do processo relativamente baixo. O método baseia-se em descrever o processo em um circuito de nós simples, identificando as junções e separações elementares na rota de processo. A partir dos dados de amostragem, é obtido um número suficiente de equações lineares independentes, permitindo a determinação das vazões mássicas de cada fluxo. Minimização da soma dos quadrados dos resíduos de fechamento por multiplicadores de Lagrange foi utilizada para a compatibilização de vazões e de teores. Os dados brutos resultaram recuperação metalúrgica de 40,1 % (e 26,18 % de recuperação mássica). O algoritmo de compatibilização resultou recuperação metalúrgica 41,42 % (e 27,11 % de recuperação mássica).

**Palavras chave:** concentração magnética, balanço de massas, redundância, recuperação mássica, recuperação metalúrgica, resíduos.

## ABSTRACT

*The operational control of a mineral treatment plant passes through mass balance, which is the application of the principle of mass conservation. It aims to determine the flows and the contents of the components present in a process, data of relevance for monitoring and control of the beneficiation of the ore. The objective of this work was to determine the mass balance of a magnetic iron ore concentration circuit, as well as the mass and metallurgical recoveries with the duly adjusted values, taking advantage of the redundancy of data acquired from the process. The fine ore that feeds the mill under study has around 42% of iron and comes from piles of material treated as tailings by previous mining. The plant in question has a relatively low level of process control. The method relies on describing the process in a single-node circuit, identifying the elementary junctions and separations in the process route. From the sampling data, enough independent linear equations are obtained, allowing the determination of the mass flow rates of each flow. Minimization of the sum of the squares of the closure residues by Lagrange multipliers was used for the compatibility of flow rates and contents. The raw data resulted in metallurgical recovery of 40.10% (and 26.18% of mass recovery). The compatibilization algorithm resulted in metallurgical recovery 41.42% (and 27.11% of mass recovery).*

**Keywords:** *magnetic concentration, mass balance, redundancy, mass recovery, metallurgical recovery, residues.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Representação dos nós: a) de separação, b) de junção (Wills & Napier-Munn, 2006).....	4
Figura 2.2 – Matriz combinada (Wills & Napier-Munn, 2006) .....	6
Figura 2.3 - Conjunto de equações a serem resolvidas na forma matricial (Wills & Napier-Munn, 2006) .....	6
Figura 3.1 Fluxograma do processo em estudo, circuito de concentração magnética.....	12
Figura 3.2 Circuito com o acréscimo de nós no concentrador magnético de alto gradiente de campo .....	13
Figura 3.3 Fluxograma do circuito de concentração magnética representado em nós simples. ....	14
Figura 4.1 Matriz conexão elaborada no Excel. ....	16
Figura 4.2 Matriz de componentes elaborada no Excel.....	16
Figura 4.3 - Matriz quadrada aumentada, combinando as matrizes de componente e de conexão, no Excel.....	17
Figura 4.4 Imagem da matriz inversa $X^{-1}$ calculada no Excel.....	17
Figura 4.5 Imagem do Excel das matrizes utilizadas para chegar às vazões mássica dos fluxos $B_j$ , representado em Y.....	17

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 3.1 Resultados obtidos dos ensaios amostrais (os fluxos 5, 6 e 7 não foram amostrados).....	15
Tabela 3.2 Resultado dos ensaios amostrais em um nó global do processo.....	15
Tabela 5.1 Valores de massa encontrados para cada fluxo circuito. ....	18
Tabela 5.2 Equações formadas pelos fluxos em cada nó que permitiram a conferência dos dados da tabela anterior. ....	18
Tabela 5.3 Valor da recuperação em massa (Q), o valor melhor estimado da recuperação mássica ( $C_{aj}$ ) e o valor de h calculado. ....	19
Tabela 5.4 Correções e ajustes dos teores. ....	19
Tabela 5.5 Comparação dos dados brutos e ajustados.....	20
Tabela 5.6 Valores calculados do índice de seletividade do circuito de concentração magnética.....	20

## NOMENCLATURA

A = vazão mássica da alimentação [t/h]

C = vazão mássica do concentrado [t/h]

E = vazão mássica do rejeito [t/h]

a = teor do componente de interesse da alimentação [%]

c = teor do componente de interesse do concentrado [%]

e = teor da componente de interesse do rejeito [%]

Q = recuperação mássica [%]

R = recuperação metalúrgica [%]

N = número mínimo de pontos de amostragem

F = número de fluxos de alimentação

V = número de nós de separação

n = número de elementos

k = componente que varia de 1 a n

r = resíduo devido ao erro do fechamento [%]

i = linha da matriz

j = coluna da matriz

M = matriz material

B = matriz das vazões mássicas relativas

S = função soma dos quadrados dos resíduos

C<sub>aj</sub> = melhor estimativa para o valor de Q [%]

a<sub>kaj</sub>, c<sub>kaj</sub>, e<sub>kaj</sub> = valores dos componentes ajustados em cada fluxo [%]

a<sub>kcr</sub>, c<sub>kcr</sub>, e<sub>kcr</sub> = valores das correções [%]

a<sub>kaj</sub>, c<sub>kaj</sub>, e<sub>kaj</sub> = valores dos componentes ajustados [%]

X = matriz aumentada

Z = matriz solução

h = constante relacionada às correções

L = Lagrangeana

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>2</b>
2.1	Tratamento de minérios .....	2
2.2	Fórmula de dois produtos .....	2
2.3	Recuperação mássica do processo .....	2
2.4	Recuperação metalúrgica .....	3
2.5	Índice de seletividade de Gaudin .....	3
2.6	Balanço de Massas .....	3
2.7	Balanço com redundância de dados .....	6
<b>3</b>	<b>ESTUDO DE CASO .....</b>	<b>12</b>
3.1	Descrição do processo .....	12
3.2	Dados do processo .....	14
<b>4</b>	<b>DESENVOLVIMENTO.....</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS.....</b>	<b>18</b>
5.1	Balanço de massa.....	18
5.2	Ajuste do balanço global.....	19
5.3	Cálculo do Índice de seletividade .....	20
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>21</b>
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>22</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Maximizar o controle da rota do minério no processo é uma tarefa que pode ser desafiadora e sempre de grande importância. Isso cabe aos engenheiros de processos de cada empreendimento, responsáveis pela boa produtividade e segurança junto com a equipe que também dominam o setor. Esse controle pode ser determinante para a implantação de melhorias na planta, otimizar o processo, rastreando e diminuindo as perdas que podem ocorrer em alguma fase do mesmo.

O balanço de massa parte da premissa que as vazões mássicas dos fluxos que alimentam o sistema somados, são iguais à soma das vazões mássicas dos fluxos que saem dele. Existem diversas maneiras de determinar um balanço de massa, mas será apresentado uma bastante acessível, utilizando a ferramenta do Excel, proposta por Wills & Napier Munn (2006), a partir dos teores dos elementos de interesse presentes nos fluxos do processo. Para isso, são necessárias amostragens que são susceptíveis à erros e podem ser ajustados estatisticamente para aproximar o resultado do valor real. O balanço fornecerá resultados relativos à um fluxo de referência que possui vazão mássica conhecida e possibilitará calcular para todos os outros fluxos do processo as vazões mássicas em toneladas por hora.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Tratamento de minérios

O Centro de Tecnologia Mineral (CETEM, 2010) diz que *tratamento* ou *beneficiamento de minérios* consiste de operações – aplicadas aos bens minerais – visando modificar sua granulometria, a concentração relativa das espécies minerais presentes ou a forma, sem modificar a identidade química ou física dos minerais.

O desempenho do beneficiamento pode ser medido por alguns parâmetros como recuperação mássica, recuperação metalúrgica e índice de seletividade de Gaudin.

### 2.2 Fórmula de dois produtos

Wills & Napier-Munn (2006), que desenvolveu todo o formulismo presente neste trabalho, afirmava que para avaliar o desempenho da planta é necessário contabilizar as vazões mássicas dos produtos e seus componentes. Para isso, utiliza-se a fórmula de dois produtos, que envolve a vazão mássica da alimentação (A), do concentrado (C) e do rejeito (E) e seus respectivos teores dos componentes de interesse, expressa por:

$$A = C + E \quad (2.1)$$

$$Aa = Cc + Ee \quad (2.2)$$

### 2.3 Recuperação mássica do processo

Segundo (Wills & Napier-Munn, 2006) a recuperação (Q) de um processo calculado pelas vazões mássicas dos seus fluxos é dada pela equação 2.3:

$$Q = \frac{C}{A} \quad (2.3)$$

Também pode ser expressa pelos exclusivamente pelos teores:

$$Q = \frac{(a-e)}{(c-e)} \quad (2.4)$$

## 2.4 Recuperação metalúrgica

Segundo (Wills & Napier-Munn, 2006) a recuperação metalúrgica (R) do mineral de interesse no concentrado é dada pela equação 2.5:

$$R = \frac{Cc}{Aa} \quad (2.5)$$

Também pode ser expressa exclusivamente pelos teores:

$$R = \frac{c(a-e)}{a(c-e)} \quad (2.6)$$

## 2.5 Índice de seletividade de Gaudin

O índice de seletividade de Gaudin (1957), utilizado para avaliar o desempenho de operações de concentração, adaptado para um mineral de interesse e o todo o restante considerado ganga, é expresso por:

$$I.S. = \sqrt{\frac{c \times (1-e)}{e \times (1-c)}} \quad (2.7)$$

## 2.6 Balanço de Massas

Conforme Wills & Napier-Munn (2006), as equações 2.1 e 2.2 são fundamentais para a produção de um balanço de massa e metalúrgico considerando um sistema quando em equilíbrio. Para calcular o balanço de massa de um circuito complexo, é necessário um método mais analítico para gerar n equações lineares para n incógnitas. Qualquer fluxograma pode ser reduzido a uma série de nós, onde fluxos de processos se juntam ou se

separam. Nós simples têm uma entrada e duas saídas (um separador), ou duas entradas e uma saída (uma junção), como mostra a figura 2.1.



Figura 2.1 - Representação dos nós: a) de separação, b) de junção (Wills & Napier-Munn, 2006)

Separadores que produzem mais que dois produtos, ou junções que são alimentadas por mais de dois fluxos podem ser unidos em nós simples, conectando-os com fluxos que não tem existência física.

Um número mínimo de fluxos devem ser amostrados para assegurar a produção de um balanço de massa de um circuito complexo, desde que seja conhecido a massa de um fluxo de referência, como mostra a equação 2.8, onde  $N$  é número mínimo de pontos de amostragem,  $F$  é número de fluxos de alimentação e  $V$  é número de nós de separação (Smith & Frew, 1983):

$$N = 2(F + V) - 1 \quad (2.8)$$

Utilizando a fórmula 2.2 em cada nó, são geradas equações lineares que serão importantes na verificação da solução do sistema.

O método proposto para iniciar a produção do balanço envolve o que foi desenvolvido por Cutting (1976), o uso da matriz conexão  $C$ , que deverá possuir a quantidade de linhas igual à de nós e o de colunas igual ao de fluxos do sistema. Segundo Wills & Napier-Munn (2006), cada elemento ( $C_{ij}$ ) da matriz pode ser representado por:

- +1 para o fluxo  $j$  indo em direção ao nó  $i$ ;
- -1 para o fluxo  $j$  saindo do nó  $i$ ;
- 0 para o fluxo  $j$  não conectado ao nó  $i$ .

E Wills & Napier-Munn (2006) afirmava que a soma de cada coluna deve ser igual a +1, -1 ou 0. O conteúdo delas representa os fluxos individuais e qualquer outro resultado indica um erro no ‘input’ de dados,  $i$ . A coluna somada sendo igual a:

- +1, o fluxo é de alimentação;
- -1, o fluxo é um produto;
- 0, fluxo é uma corrente interna;

A matriz descrita acima pode ser usada para fornecer o conjunto de operações lineares que ao serem resolvidas produzem os fluxos de massa.

Então a matriz material  $M$ , em que  $B_j$  é a vazão mássica de sólidos do fluxo  $j$ , é definida pela equação 2.9 e a partir de  $M$ , deverá ser definida uma matriz componente  $A$  (equação 2.10). Importante ressaltar que deverá ser utilizando apenas nós independentes aos fluxos que não foram amostrados. Sendo  $a_j$  o teor do mineral no fluxo  $j$  (Wills & Napier-Munn, 2006):

$$M_{ij} = C_{ij} B_j \quad (2.9)$$

$$C_{ij} B_j a_j = M_{ij} a_j = A_{ij} \quad (2.10)$$

Num exemplo com 12 fluxos e 7 nós, em que há um fluxo conhecido, são necessárias 11 operações lineares independentes para obter os fluxos de massa relativos ao de referência. Um balanço de material pode ser executado em cada nó, fornecendo 7 equações, e o balanço de componentes das alimentações e produtos da planta fornecem uma equação a mais. Então, são necessários 4 balanços de componentes nos nós dos circuitos. Portanto a matriz componente, nesse caso, deve conter 4 linhas e 12 colunas.

Em um nó qualquer, é importante que o mesmo componente seja usado para avaliar cada fluxo, e o componente deve ser escolhido produzindo uma equação com sensibilidade mínima a erros. O componente pode ser selecionado por análise de sensibilidade e desde que o mesmo componente seja usado em um nó qualquer, outros componentes podem ser usados para balancear outros nós no circuito. Isto significa que, em um balanceamento de um circuito complexo, componente como conteúdo metálico, razão de diluição, e análises

granulométricas, podem ser utilizados em várias partes do circuito (Wills & Napier-Munn, 2006).

Ao sobrepor a matriz  $M$  sobre  $A$  temos uma nova em que  $s$  é o número de fluxos e  $n$  é o número de nós:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1s} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{ns} \\ A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{ns} \end{pmatrix}$$

Figura 2.2 – Matriz combinada (Wills & Napier-Munn, 2006)

Tomando o fluxo  $s$  como referência e  $B_s = 1$ ,  $B_j$  será uma fração do fluxo de referência relativa ao fluxo  $j$ . Considerando  $B_s = 1$ ,  $M_{1s} = C_{1s}$  e  $A_{1s} = C_{1s} a_s$ . Realizando a multiplicação de matrizes, o conjunto de operações lineares a ser resolvido é (Wills & Napier-Munn, 2006):

$$\begin{pmatrix} C_{11} \dots C_{1(s-1)} \\ C_{21} \dots C_{2(s-1)} \\ \vdots \\ C_{n1} \dots C_{n(s-1)} \\ C_{11} a_1 \dots C_{1(s-1)} a_{(s-1)} \\ \vdots \\ C_{n1} a_1 \dots C_{n(s-1)} a_{(s-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{(s-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_{1s} \\ -C_{2s} \\ \vdots \\ \vdots \\ -C_{ns} \\ -C_{1s} a_s \\ \vdots \\ \vdots \\ -C_{ns} a_s \end{pmatrix}$$

Figura 2.3 - Conjunto de equações a serem resolvidas na forma matricial (Wills & Napier-Munn, 2006)

## 2.7 Balanço com redundância de dados

As informações redundantes para a definição do balanço podem ser tratadas estatisticamente para aproximar-se do valor real dos parâmetros de controle. Por exemplo,

tendo em mãos dadas as porcentagens de dois ou mais minerais nos fluxos de um nó é possível chegar ao valor da eficiência mássica por mais de um caminho. Seguindo o que foi mostrado por Wills & Napier-Munn (2006) para trabalhar dados redundantes, será demonstrado o uso do método de minimização da soma dos quadrados dos resíduos de fechamento. A sequência e as fórmulas a serem utilizadas se os fluxos de separação simples são amostrados e analisados para  $n$  componentes é:

$$Aa_k - Cc_k - Ee_k = r_k \quad (2.11)$$

Sendo  $k$  a componente que varia de 1 à  $n$  para alimentação, concentrado, rejeito e resíduo devido ao erro do fechamento do balanço ( $r_k$ ):

Se na equação 2.1 utilizarmos  $A=1$ , então  $E = 1 - C$ . Colocando a equação 2.11 em função de  $C$ , temos:

$$a_k - Cc_k - (1 - C) e_k = r_k \quad (2.12)$$

$$(a_k - e_k) - C(c_k - e_k) = r_k \quad (2.13)$$

Segundo Wills & Napier-Munn (2006) o objetivo deste método é achar o valor de  $C$  que minimize a soma dos quadrados dos resíduos referentes ao erro de fechamento do balanço. Portanto, é minimizar a função  $S$  abaixo:

$$S = \sum_{k=1}^n r_k^2 \quad (2.13)$$

Combinando as equações 2.13 e 2.14:

$$S = \sum_{k=1}^n (a_k - e_k)^2 + C^2 \sum_{k=1}^n (c_k - e_k)^2 - 2C \sum_{k=1}^n (a_k - e_k)(c_k - e_k) \quad (2.15)$$

O valor mínimo da função S é encontrado quando  $dS/dC = 0$ . Então:

$$2C_{aj} \sum_{k=1}^n (c_k - e_k)^2 - 2 \sum_{k=1}^n (a_k - e_k)(c_k - e_k) = 0, \quad (2.16)$$

Neste caso, como a equação 2.12 colocou os valores das vazões mássicas em função de C utilizando  $A = 1$ , de acordo com a equação 2.3 o valor de C representa a eficiência mássica (Q) do sistema. Retomando a equação 2.16 chegamos em  $C_{aj}$ , melhor estimativa para o valor de Q:

$$C_{aj} = \frac{\sum_{k=1}^n (a_k - e_k)(c_k - e_k)}{\sum_{k=1}^n (c_k - e_k)^2} \quad (2.17)$$

Segundo Wills & Napier-Munn (2006) encontrada a melhor estimativa da massa do concentrado, deve-se ajustar os valores dos componentes em cada fluxo envolvido no sistema. Para isso, a equação 2.12 será aplicada, considerando  $a_{kaj}$ ,  $c_{kaj}$ ,  $e_{kaj}$  os valores dos componentes ajustados em cada fluxo.

$$a_{kaj} - C_{aj}c_{kaj} - (1 - C_{aj})e_{kaj} = 0 \quad (2.18)$$

Sendo  $a_{kcr}$ ,  $c_{kcr}$ ,  $e_{kcr}$ , os valores das correções:

$$(a_k - a_{kcr}) - C_{aj}(c_k - c_{kcr}) - (1 - C_{aj})(e_k - e_{kcr}) = 0 \quad (2.19)$$

Desenvolvendo a equação 2.12:

$$a_k - C_{aj}c_k - (1 - C_{aj})e_k = r_k \quad (2.20)$$

Subtraindo a equação 2.19 da equação 2.20:

$$r_k = a_{kcr} - C_{aj}c_{kcr} - (1 - C_{aj})e_{kcr} \quad (2.21)$$

Aplicando o mínimo quadrado, a função  $S_{cr}$  a ser minimizada é:

$$S_{cr} = \sum_{k=1}^n (a_{kcr}^2 + c_{kcr}^2 + e_{kcr}^2) \quad (2.22)$$

Segundo Wills & Napier-Munn (2006) para solução desta equação, pode-se aplicar o método de Lagrange, com o qual as restrições são expressas sendo iguais a zero. Dessa forma a equação é:

$$r_k - a_{kcr} + C_{aj}c_{kcr} + (1 - C_{aj})e_{kcr} = 0 \quad (2.23)$$

Aplicando a minimização da função L de Lagrange.

$$L = \sum_{k=1}^n (a_{kcr}^2 + c_{kcr}^2 + e_{kcr}^2) + 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k [r_k - a_{kcr} + C_{aj}c_{kcr} + (1 - C_{aj})e_{kcr}] \quad (2.24)$$

A função L é diferenciada em relação a cada uma das incógnitas e igualada a zero:

$$\frac{\partial L}{\partial a_{kcr}} = 2a_{kcr} - 2\lambda_k = 0 \quad (2.25)$$

$$a_{kcr} = \lambda_k \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{kcr}} = 2c_{kcr} - 2\lambda_k C_{aj} = 0 \quad (2.27)$$

$$c_{kcr} = -\lambda_k C_{aj} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial e_{kcr}} = 2e_{kcr} + 2\lambda_k(1 - C_{aj}) = 0 \quad (2.29)$$

$$e_{kcr} = -\lambda_k(1 - C_{aj}) \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 2[r_k - a_{kcr} + C_{aj}c_{kcr} + (1 - C_{aj})e_{kcr}] = 0 \quad (2.31)$$

Combinando e desenvolvendo as equações 2.26, 2.28, 2.30 e 2.31:

$$r_k = \lambda_k[1 + C_{aj}^2 + (1 - C_{aj})^2] = h\lambda_k \quad (2.32)$$

Em que:

$$h = 1 + C_{aj}^2 + (1 - C_{aj})^2 \quad (2.33)$$

Logo:

$$a_{kcr} = \frac{r_k}{h} \quad (2.34)$$

$$c_{kcr} = -\frac{C_{aj}r_k}{h} \quad (2.35)$$

$$e_{kcr} = -\frac{(1 - C_{aj})r_k}{h} \quad (2.36)$$

Então, utilizando os valores das correções chega-se aos valores das medidas ajustadas:

$$a_{kaj} = a_k - a_{kcr} \quad (2.37)$$

$$c_{kaj} = c_k - c_{kcr} \quad (2.38)$$

$$e_{kaj} = e_k - e_{kcr} \quad (2.39)$$

Em resumo, depois que  $C_{aj}$  é determinado pela equação 2.17, calcula-se o valor de  $h$  pela equação 2.33 e  $r_k$  pela 2.20. Daí pelas operações 2.34, 2.35 e 2.36 se chega aos valores das correções a serem aplicadas ( $a_{kcr}$ ,  $c_{kcr}$ ,  $e_{kcr}$ ). E por fim, pelas operações 2.37, 2.38 e 2.39. se chega aos valores dos componentes ajustados ( $a_{kaj}$ ,  $c_{kaj}$ ,  $e_{kaj}$ ).

### 3 ESTUDO DE CASO

A linha de processo estudada no presente trabalho trata-se do beneficiamento de minério de ferro por meio da concentração magnética contendo duas etapas, uma de baixo e outra de alto gradiente de campo. O estudo consiste na determinação do balanço de massas, a vazão mássica de cada fluxo do circuito, ajuste dos balanços globais de massas e metalúrgico, além da determinação da recuperação mássica e metalúrgica global.

#### 3.1 Descrição do processo

O circuito é representado pela figura 3.1. O minério fino possui por volta de 42 % de ferro, é proveniente de pilhas de material tratado como rejeito por minerações anteriores. Apesar do surgimento de novas tecnologias que permitem o reprocessamento de rejeitos, a planta em questão possui condições de controle do processo relativamente baixo.

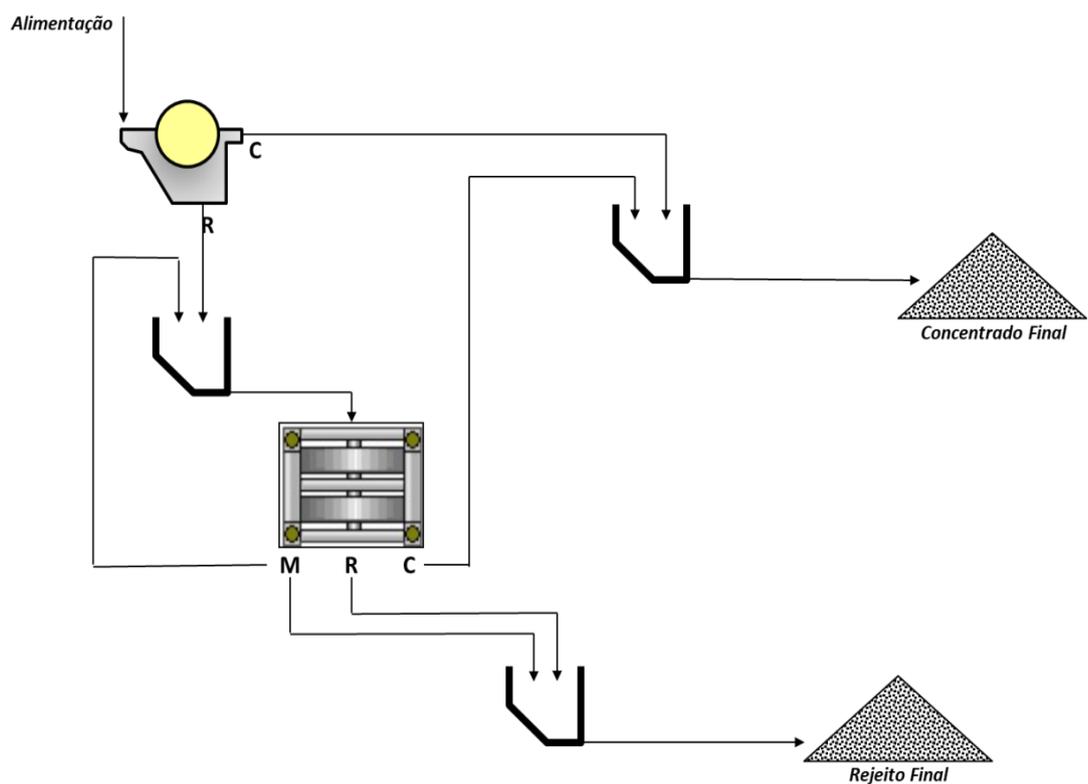


Figura 3.1 Fluxograma do processo em estudo, circuito de concentração magnética.

O material que alimenta a planta passa primeiramente pelo concentrador magnético de rolos, de baixo gradiente de campo, que tem como objetivo separar a magnetita para a caixa

de produto. O rejeito dessa etapa segue para o concentrador de alto gradiente de campo, onde o concentrado segue para a mesma caixa de produto da etapa anterior, o rejeito segue para a caixa de rejeito e há uma terceira saída nessa etapa que é o material com médio teor (teor de ferro acima da alimentação, mas não suficiente para ser considerado produto). Metade desse fluxo é reaproveitado na alimentação do concentrador de alto gradiente de campo e a outra é descartada no rejeito.

Detalhe importante observado na figura 3.1, o concentrador magnético de alto gradiente de campo possui um fluxo de entrada e quatro fluxos de saída. Diante da necessidade de representar o circuito em sistema de nós simples, como mostra a figura 2.1, o que estava representado por um nó foi transformado em 3 nós (figura 3.2). Os fluxos foram numerados (de 1 a 12) e os 7 nós representadas pelos algarismos gregos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\chi$ ,  $\delta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\phi$  e  $\gamma$ :

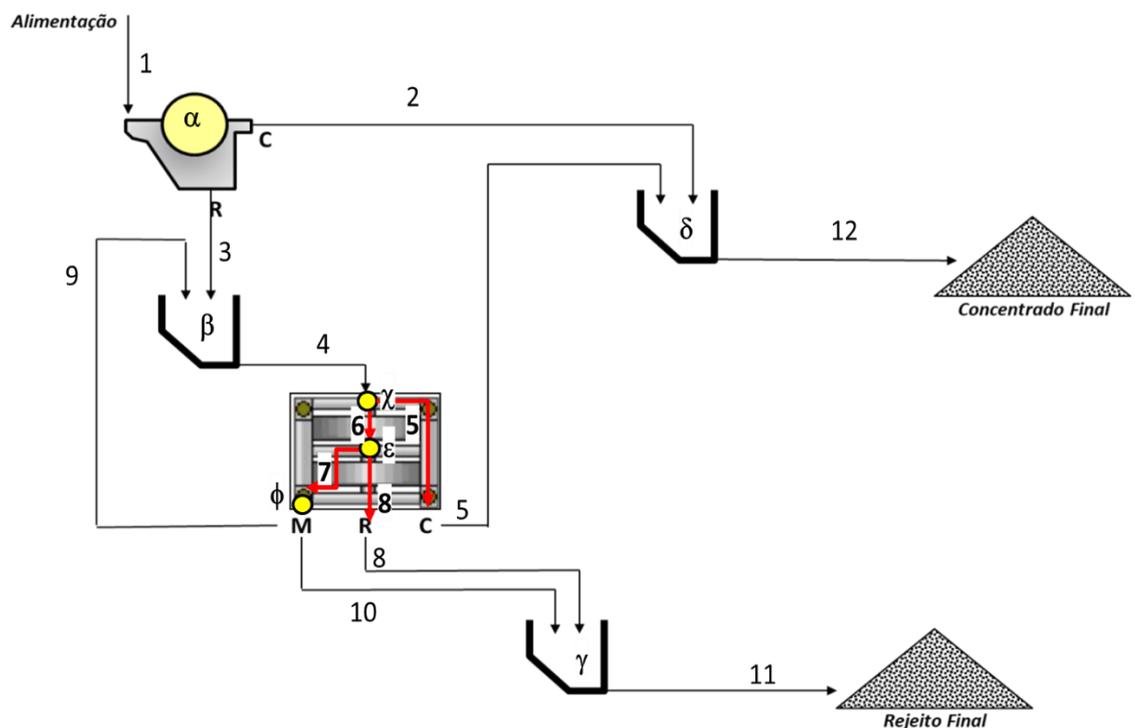


Figura 3.2 Circuito com o acréscimo de nós no concentrador magnético de alto gradiente de campo

O circuito apresentado no fluxograma da figura 3.2, então pôde ser representado como um circuito de nós simples, como mostra a figura 3.3:

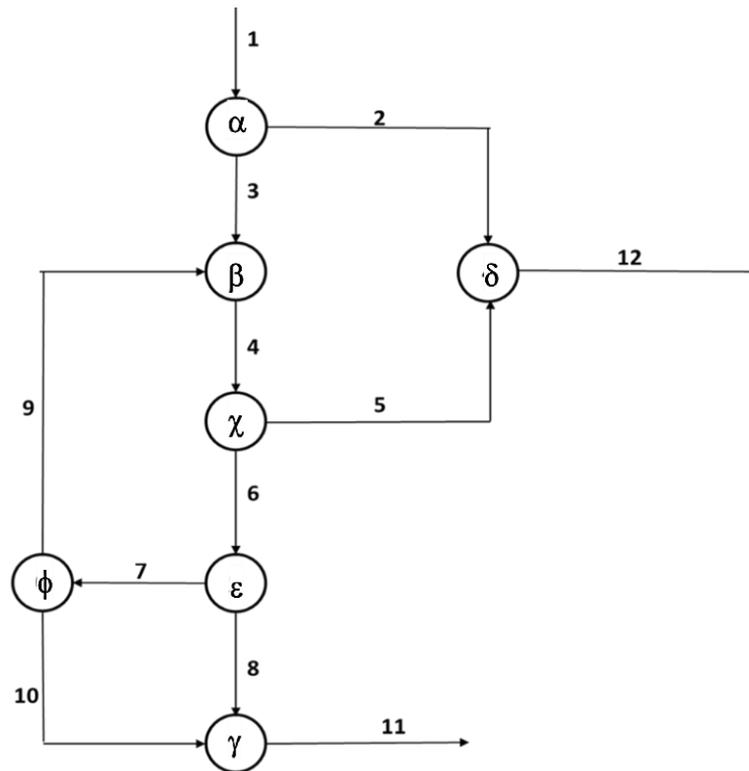


Figura 3.3 Fluxograma do circuito de concentração magnética representado em nós simples.

### 3.2 Dados do processo

O fluxo 12 é o de referência. Foi medida a vazão mássica nele presente e o resultado foi de 67,6 t/h.

Utilizando a equação 2.7, dos 12 fluxos do sistema, no mínimo 9 fluxos devem ser amostrados quimicamente para produção do balanço. Foram escolhidos os fluxos 5, 6 e 7 para não serem amostrados. Os resultados são apresentados seguir na tabela 3.1 e 3.2.

Tabela 3.1 Resultados obtidos dos ensaios amostrais (os fluxos 5, 6 e 7 não foram amostrados).

Fluxo	Teores (%)	
	Fe	SiO <sub>2</sub>
1	41,75	36,56
2	64,97	5,27
3	41,1	36,4
4	40,82	37,78
5	-	-
6	-	-
7	-	-
8	32,8	45,6
9	15,45	70,84
10	47,47	26,89
11	33,88	47,81
12	63,94	7,08

Tabela 3.2 Resultado dos ensaios amostrais em um nó global do processo.

Balanço Global	Fluxo	Teor (%)	
		Fe	SiO <sub>2</sub>
Alimentação	1	41,75	36,56
Concentrado	12	63,94	7,08
Rejeito	11	33,88	47,81

#### 4 DESENVOLVIMENTO

Foi utilizada a ferramenta computacional do Excel para realização dos cálculos demonstrados pelo item 2.5 deste trabalho.

Utilizando o circuito representado em nós simples (figura 3.2), foi possível elaborar a matriz conexão do sistema (figura 4.1):

MATRIZ C												
NÓ/FLUXO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\alpha$	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\beta$	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0
$\chi$	0	0	0	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
$\delta$	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1
$\epsilon$	0	0	0	0	0	1	-1	-1	0	0	0	0
$\phi$	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	-1	0	0
$\gamma$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	-1	0
SOMA COLUNAS	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1
	Alim.	fluxo int.	Prod.	Prod.								

Figura 4.1 Matriz conexão elaborada no Excel.

A soma das colunas nos certifica que a matriz foi preenchida corretamente. Os fluxos 11 e 12 são de saída (rejeito e produto final) e o 1 de entrada (alimentação). Os demais são internos.

Com os dados da tabela 3.1 e do circuito de nós simples, foi criada a matriz componente (figura 4.2), utilizando os nós  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e global, apenas nós com todos os fluxos amostrados:

MATRIZ COMPONENTE												
NÓ/FLUXO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\alpha$	41,75	-64,97	-41,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\beta$	0	0	41,1	-40,82	0	0	0	0	15,45	0	0	0
$\gamma$	0	0	0	0	0	0	0	32,8	0	47,47	-33,88	0
Global	41,75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-33,88	-63,94

Figura 4.2 Matriz de componentes elaborada no Excel.

Como o fluxo 12 é o de referência, uma matriz solução (Z) foi composta com os seus dados. Ele não foi considerado na combinação das matrizes conexão e componente que originou uma matriz quadrada (X) (figura 4.3):

MATRIZ QUADRADA (X)										
1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	-1	-1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	-1	-1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	-1	-1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	-1
41,75	-64,97	-41,1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	41,1	-40,82	0	0	0	0	15,45	0	0
0	0	0	0	0	0	0	32,8	0	47,47	-33,88
41,75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-33,88

Figura 4.3 - Matriz quadrada aumentada, combinando as matrizes de componente e de conexão, no Excel.

Como a matriz X é quadrada, foi possível calcular a sua inversa (figura 4.4):

MATRIZ INVERSA de X										
-4,3	-4,3	-4,3	-4,3	-4,3	-4,3	-4,3	0,0	0,0	0,0	0,1
1,6	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	0,0	0,0	0,0	0,0
-6,9	-4,2	-4,2	-4,2	-4,2	-4,2	-4,2	0,0	0,0	0,0	0,1
-7,0	-3,6	-4,2	-4,2	-4,2	-4,2	-4,2	0,0	0,0	0,0	0,1
-1,6	0,1	0,1	1,1	0,1	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0
-5,4	-3,7	-5,4	-5,4	-4,4	-4,4	-4,4	0,0	0,0	0,0	0,1
-0,5	1,2	-0,4	-0,4	-0,4	0,6	-2,7	0,0	0,0	0,1	0,0
-4,9	-4,9	-4,9	-4,9	-4,9	-4,9	-1,7	0,0	0,0	-0,1	0,1
-0,1	1,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-2,6	0,0	0,0	0,1	0,0
-5,3	-5,3	-5,3	-5,3	-5,3	-5,3	-5,3	0,0	0,0	0,0	0,1

Figura 4.4 Imagem da matriz inversa  $X^{-1}$  calculada no Excel.

O cálculo da matriz inversa foi necessário para multiplicarmos pela matriz solução (Z) e chegarmos ao nosso objetivo que são os valores de Y, das massas dos fluxos da linha de processo. Os resultados de Y serão uma porcentagem do fluxo de referência (figura 4.5).

$X^{-1}$										Y	Z	
-4,3	-4,3	-4,3	-4,3	-4,3	-4,3	-4,3	0,0	0,0	0,0	0,1	B1	0
1,6	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	B2	0
-6,9	-4,2	-4,2	-4,2	-4,2	-4,2	-4,2	0,0	0,0	0,0	0,1	B3	0
-7,0	-3,6	-4,2	-4,2	-4,2	-4,2	-4,2	0,0	0,0	0,0	0,1	B4	1
-1,6	0,1	0,1	1,1	0,1	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	B5	0
-5,4	-3,7	-5,4	-5,4	-4,4	-4,4	-4,4	0,0	0,0	0,0	0,1	B6	0
-0,5	1,2	-0,4	-0,4	-0,4	0,6	-2,7	0,0	0,0	0,1	0,0	B7	0
-4,9	-4,9	-4,9	-4,9	-4,9	-4,9	-1,7	0,0	0,0	-0,1	0,1	B8	0
-0,1	1,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	B9	0
-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-2,6	0,0	0,0	0,1	0,0	B10	0
-5,3	-5,3	-5,3	-5,3	-5,3	-5,3	-5,3	0,0	0,0	0,0	0,1	B11	63,94

Figura 4.5 Imagem do Excel das matrizes utilizadas para chegar às vazões mássica dos fluxos  $B_j$ , representado em Y.

## 5 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

### 5.1 Balanço de massa

O valor de 67,6 t/h do fluxo 12 foi dado como entrada para calcular a vazão mássica dos demais fluxos como mostrado na tabela 5.1. Depois, a tabela 5.2 mostra que foi feita a conferência dos dados utilizando a equação 2.1, chegando à conclusão que estão coerentes.

Tabela 5.1 Valores de massa encontrados para cada fluxo circuito.

Y	Solução	Massa (t/h)
B1	381,96%	258,2
B2	10,40%	7,0
B3	371,56%	251,2
B4	375,66%	253,9
B5	89,60%	60,6
B6	286,06%	193,4
B7	24,86%	16,8
B8	261,20%	176,6
B9	4,10%	2,8
B10	20,76%	14,0
B11	281,96%	190,6
B12	100%	67,6

Tabela 5.2 Equações formadas pelos fluxos em cada nó que permitiram a conferência dos dados da tabela anterior.

Verificação:	
$B1=B2+B3$	$B2+B3-B1=0$
$B4=B3+B9$	$B3+B9-B4=0$
$B4=B5+B6$	$B5+B6-B4=0$
$B12=B2+B5$	$B2+B5-B12=0$
$B6=B7+B8$	$B7+B8-B6=0$
$B7=B9+B10$	$B9+B10-B7=0$
$B11=B8+B10$	$B8+B10-B11=0$
$B1=B11+B12$	$B11+B12-B1=0$

A partir desse balanço, a recuperação mássica foi de 26,18% e metalúrgica de 40,10%.

## 5.2 Ajuste do balanço global

Como mostra a tabela 3.2, também foi possível levantar os teores de sílica do balanço global e essa foi a redundância de dados que permite utilizar o método de minimização da soma dos quadrados dos resíduos de fechamento, como mostra o item 2.8.

Fazendo uso da equação 2.17, determinou-se uma melhor estimativa ( $C_{aj}$ ) do valor da recuperação mássica. Com esse valor se chega ao valor de  $h$  pela equação 2.33, mostrados pela tabela 5.3:

Tabela 5.3 Valor da recuperação em massa ( $Q$ ), o valor melhor estimado da recuperação mássica ( $C_{aj}$ ) e o valor de  $h$  calculado.

Recuperação mássica	
Q (%)	$C_{aj}$ (%)
26,18	27,11
$h=$	1,6048

Através da equação 2.20, se obtém o valor de  $r_k$  das componentes. O valor das correções ( $a_{ker}$ ,  $c_{ker}$ ,  $e_{ker}$ ) são calculadas pelas equações 2.34, 2.35 e 2.356 O valor das componentes ajustadas ( $a_{kaj}$ ,  $c_{kaj}$ ,  $e_{kaj}$ ) pelas equações 2.37, 2.38 e 2.39. O resultado dessas operações estão na tabela 5.4:

Tabela 5.4 Correções e ajustes dos teores.

Ajuste dos teores							
Componente	$r_k$	Valor da correção ( $a_{ker}$ , $c_{ker}$ , $e_{ker}$ )			Valor ajustado ( $a_{kaj}$ , $c_{kaj}$ , $e_{kaj}$ )		
		Alimentação	Concentrado	Rejeito	Alimentação	Concentrado	Rejeito
Ferro	-0,2802%	-0,1746%	0,0473%	0,1273%	41,92%	63,89%	33,75%
Sílica	-0,2068%	-0,1289%	0,0349%	0,0939%	36,69%	7,05%	47,72%

Após ajuste do balanço global metalúrgico, os valores ajustados dos teores na alimentação, concentrado e rejeito determinaram uma recuperação metalúrgica de 41,42%.

A tabela 5.5 compara os valores brutos e ajustados da recuperação mássica e metalúrgica calculados do circuito.

Tabela 5.5 Comparação dos dados brutos e ajustados.

Valor Calculado	Recuperação	
	Mássica	Metalúrgica
Bruto	26,18%	40,10%
Ajustado	27,11%	41,42%

### 5.3 Cálculo do Índice de seletividade

Sendo o Fe o mineral de interesse, utilizando a fórmula 2.7, foi calculado o índice de seletividade do processo com os teores brutos e ajustados.

Tabela 5.6 Valores calculados do índice de seletividade do circuito de concentração magnética.

Teores	Índice de seletividade de Gaudin
Brutos	4,824
Ajustados	4,832

O valor do índice de seletividade calculado teve um aumento sensível com os teores ajustados.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho apresentou um método de determinação do balanço de massa de um circuito de tratamento de minérios, assim como um método estatístico para minimizar o erro no cálculo do valor da recuperação mássica e ajuste dos teores medidos pela amostragem. A recuperação metalúrgica do sistema também foi calculada e ajustada. Dessa forma, os ajustes realizados aproximaram do valor real, os resultados, provenientes de dados de amostragens que são susceptíveis à erros.

Os valores brutos para a recuperação mássica e metalúrgica foram 26,18% e 40,10%, respectivamente. Os valores ajustados foram 27,11% e 41,42%.

Os fluxos foram devidamente verificados pelas equações lineares formadas em cada nó e apresentaram resultados coerentes.

Com intuito de avaliar o desempenho do circuito de concentração magnética, foi utilizado o índice de seletividade de Goudin, em que o valor foi de 4,824 para os teores brutos e 4,832 para os teores ajustados.

Esse método, utilizando uma ferramenta computacional acessível, pode ser usado em qualquer usina de beneficiamento, principalmente usinas com condições de controle limitadas, ou que possuem dificuldades físicas para amostrar-se todos os pontos do processo.

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Cutting, G.W. Estimation of interlocking mass-balances on complex mineral beneficiation plants, *International Journal of Mineral Processing*, volume 3, p207-218, 1976.
2. Gaudin, A. M. *Principles of mineral dressing*. New Delhi: McGraw Hill, 1957.
3. Luz, A. B.; Sampaio, J.A, França, S.C.A.; *Tratamento de Minérios*. 5<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro, 2010, CETEM.
4. Smith, H.W.; Frew, J.A. Design and analysis of sampling experiments - a sensitivity approach. *International Journal of Mineral Processing*, volume 11, p267-284, 1983.
5. Wills, B.A., Napier-Munn, T.J. *Mineral Processing Technology*. 7<sup>a</sup> ed. Londres: Elsevier Science & Technology Books, 2006. 450p.