



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Escola de Minas – Departamento de Engenharia Civil  
Curso de Graduação em Engenharia Civil

---

**Karoline Ribeiro Carvalho**

**ESTUDO COMPARATIVO ENTRE OS CRITÉRIOS DE  
RESISTÊNCIA DA MÁXIMA ENERGIA DE DISTORÇÃO E DA  
MÁXIMA TENSÃO DE CISALHAMENTO**

Ouro Preto

2019

Estudo comparativo entre os critérios de resistência da máxima energia de  
distorção e da máxima tensão de cisalhamento

Karoline Ribeiro Carvalho

Monografia de conclusão de curso para  
obtenção do grau de Engenheiro Civil na  
Universidade Federal de Ouro Preto  
defendida e aprovada em 27 de junho de  
2019 como parte dos requisitos para a  
obtenção do Grau de Engenheiro Civil.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. D.Sc. Jaime Florencio Martins - UFOP

Ouro Preto

2019

C331e Carvalho, Karoline Ribeiro.  
Estudo comparativo entre os critérios de resistência da máxima energia de distorção e da máxima tensão de cisalhamento [manuscrito] / Karoline Ribeiro Carvalho. - 2019.

x,30f.: il.: tabs.

Orientador: Prof. Dr. Jaime Florencio Martins.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil.

1. Critérios de resistência. 2. Materiais dúcteis. 3. Critério de Tresca. 4. Critério de von Mises. I. Martins, Jaime Florencio. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

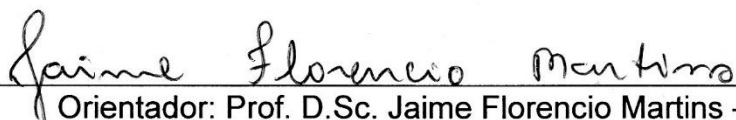
CDU: 624

Catálogo: [ficha.sisbin@ufop.edu.br](mailto:ficha.sisbin@ufop.edu.br)

Estudo comparativo entre os critérios de resistência da máxima energia de  
distorção e da máxima tensão de cisalhamento

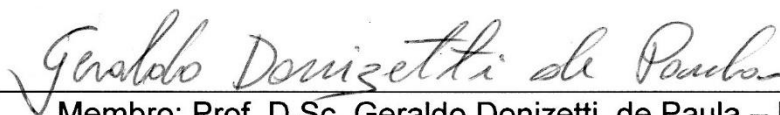
Karoline Ribeiro Carvalho

Monografia de conclusão de curso para  
obtenção do grau de Engenheiro Civil na  
Universidade Federal de Ouro Preto  
defendida e aprovada em 27 de junho de  
2019 como parte dos requisitos para a  
obtenção do Grau de Engenheiro Civil.  
Banca examinadora:



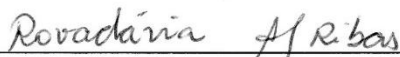
---

Orientador: Prof. D.Sc. Jaime Florencio Martins – UFOP



---

Membro: Prof. D.Sc. Geraldo Donizetti de Paula – UFOP



---

Membro: Prof<sup>a</sup>. D.Sc. Rovadavia Aline de Jesus Ribas – UFOP

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por ter me dado força e compreensão em todos os momentos.

Ao meu professor orientador, Dr. Jaime Florencio Martins, pela dedicação, apoio, atenção e conhecimentos compartilhados durante o desenvolvimento deste trabalho.

À minha mãe, que sempre foi a base de tudo na minha vida, que me ensinou a trilhar o caminho do bem e que não mediu esforços para que eu chegasse até aqui.

Ao Hericksson, meu companheiro e amigo, pelo carinho e cumplicidade nos momentos difíceis, pelo apoio e todo amor doado.

Ao meu pai, irmã, amigos e familiares, por todo apoio e carinho.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia Civil da UFOP, pela atenção, ajuda e disponibilidade cedidas.

## RESUMO

O presente trabalho visa realizar o estudo de dois critérios de resistência para materiais dúcteis: critério da máxima tensão de cisalhamento, conhecido como Critério de Tresca e critério da máxima energia de distorção, conhecido como Critério de von Mises. Objetiva-se fazer a comparação entre os dois critérios de resistência para o estado plano de tensão e para o estado geral de tensão. Para isso, torna-se necessário conhecer os fundamentos e as definições de cada um dos critérios, assim como as equações que os descrevem. Foi desenvolvida uma metodologia e os cálculos foram realizados no software Microsoft Excel, a fim de encontrar a maior discrepância entre os dois critérios de resistência para o estado plano de tensão quando o material está submetido à tração. Além disso, elaborou-se uma Planilha de Cálculo no Microsoft Excel para encontrar a maior diferença entre os dois critérios de resistência para o estado geral de tensão. Concluiu-se que, tanto para o estado plano de tensão como para o estado geral de tensão, a maior diferença existente entre a previsão de falha dos critérios de von Mises e Tresca é de 15,47%.

Palavras-chaves: Critérios de resistência, Materiais dúcteis, Critério de Tresca, Critério de von Mises.

## **ABSTRACT**

The present work aims the study of two resistance criteria for ductile materials: maximum shear stress criterion, known as Tresca Condition and maximum distortion energy criterion, known as von Mises Condition. The goal is to compare the two resistance criteria on the plane state of stress and on general state of stress. In order to do that, it is necessary to know the fundamentals and definitions of each criterion, as well as the equations that describe them. A methodology was developed and calculations were performed using Microsoft Excel to find the greatest discrepancy between the two resistance criteria for the plane state of stress when the material is subjected to traction. In addition, a calculation worksheet was developed using Microsoft Excel to find the greatest difference between the two criteria of resistance for the general state of stress. It was concluded that, for both the plane state of stress and the general state of stress, the greatest difference between the predicted failure of the von Mises and Tresca Condition is 15.47%.

Keywords: Resistance criteria, Ductile materials, Tresca Condition, von Mises Condition.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Elemento sob estado de tensão uniaxial .....	3
Figura 2 - Elemento sob estado plano de tensão.....	3
Figura 3 - Hexágono de Tresca .....	6
Figura 4 - Elipse de von Mises.....	8
Figura 5 - Comparação entre os critérios da máxima tensão de cisalhamento e da máxima energia de distorção .....	10
Figura 6 - Circunferência de Mohr para carga torcional.....	11
Figura 7 - Barra submetida a torção pura .....	13
Figura 8 - Comparação entre os critérios da máxima tensão de cisalhamento e da máxima energia de distorção quando as tensões principais $\sigma_a$ e $\sigma_b$ são positivas ...	17
Figura 9 - Esquema da metodologia adotada .....	19
Figura 10 - Representação da maior diferença entre os critérios de Tresca e von Mises quando as tensões principais são positivas .....	21
Figura 11 - Representação do estado geral de tensão e do sentido positivo dos componentes de tensão normal e de cisalhamento .....	22



## LISTA DE SÍMBOLOS

$\sigma$  – Tensão normal

$\tau$  – Tensão de cisalhamento

$\sigma_{máx}$  – Tensão normal máxima de um elemento estrutural

$\sigma_Y$  – Tensão normal máxima de um corpo de prova que escoar em um ensaio de tração

$\tau_{máx}$  – Tensão de cisalhamento máxima de um elemento estrutural

$\tau_Y$  – Tensão de cisalhamento máxima de um corpo de prova que escoar em um ensaio de tração

$\sigma_1$  – Maior tensão normal no estado geral de tensão (Tensão principal 1)

$\sigma_2$  – Tensão normal intermediária no estado geral de tensão (Tensão principal 2)

$\sigma_3$  – Menor tensão normal no estado geral de tensão (Tensão principal 3)

$\sigma_a$  – Maior tensão normal no estado plano de tensão (Tensão principal a)

$\sigma_b$  – Menor tensão normal no estado plano de tensão (Tensão principal b)

$u_d$  – Energia de distorção por unidade de volume de um material

$(u_d)_Y$  – Energia de distorção por unidade de volume necessária para provocar escoamento em um corpo de prova submetido a um ensaio de tração

## SUMÁRIO

Agradecimentos .....	IV
Resumo .....	V
Abstract.....	VI
Lista de Figuras .....	VII
Lista de Símbolos .....	VIII
Sumário .....	IX
1 Introdução .....	1
1.1 Objetivo.....	2
2 Revisão Bibliográfica.....	3
2.1 Critério da máxima tensão de cisalhamento – Critério de Tresca.....	4
2.2 Critério da máxima energia de distorção – Critério de von Mises.....	6
2.2.1 Critério da máxima energia de distorção em função das tensões não principais .....	8
2.3 Comparação entre os critérios de Tresca e von Mises.....	10
2.3.1 Exemplo de aplicação .....	13
3 Metodologia.....	17
3.1 Comparação entre os critérios de Tresca e von Mises para o estado plano de tensão quando as tensões principais $\sigma_a$ e $\sigma_b$ são positivas.....	17
3.2 Comparação entre os critérios de Tresca e von Mises para o estado geral de tensão .....	18
4 Resultados .....	20
4.1 Comparação entre os critérios de Tresca e von Mises para o estado plano de tensão, quando as tensões principais $\sigma_a$ e $\sigma_b$ são positivas .....	20
4.2 Comparação entre os critérios de Tresca e von Mises para o estado geral de tensão .....	22

4.2.1	Estados de tensão com apenas tensão de cisalhamento .....	23
4.2.2	Estados de tensão com apenas tensão normal .....	24
4.2.3	Estados de tensão com componentes de tensão normal e de cisalhamento .....	26
5	Conclusão .....	28
	Referências.....	29
	Apêndice A .....	30

# 1 INTRODUÇÃO

O fenômeno de falha de elementos estruturais depende do tipo de material que os compõem. A falha de materiais frágeis como o concreto, por exemplo, ocorre de forma brusca, sem aviso prévio, e com pequena deformação. A falha de materiais dúcteis acontece com grande nível de deformação antes da ruptura. Um exemplo de material dúctil muito utilizado na engenharia são os metais.

O estudo da resistência dos materiais e o desenvolvimento de materiais novos teve grande impulso a partir da revolução industrial (MORALES, 2013). Os metais passaram a integrar estruturas de engenharia, como pontes e edifícios, e isso desencadeou a necessidade de estudar a resistência e a ductibilidade desse material (MORALES, 2013).

Na engenharia civil, existem vários critérios de previsão de falha, que são chamados de critérios de resistência. Segundo Schiel (1984) o objetivo dos critérios de resistência é informar se um componente estrutural está em segurança quando submetido a diferentes solicitações. Por meio desses critérios é possível obter os valores de tensão que provocam o escoamento ou a ruptura do material.

Na prática da engenharia, os dois critérios de resistência mais frequentemente usados para materiais dúcteis são o critério da máxima tensão de cisalhamento e o critério da máxima energia de distorção (BEER *et al.*, 2011). Os critérios geralmente utilizados para materiais frágeis são o critério da tensão normal máxima e o critério de Mohr. Além desses critérios citados, existem outros critérios na literatura e escolher o mais adequado é tarefa do pesquisador.

Dessa forma, o estudo dos critérios de resistência é de fundamental importância na Engenharia, pois permite determinar valores de tensão e deformação que garantem a segurança do material e o consequente desenvolvimento de máquinas e estruturas eficientes e seguras.

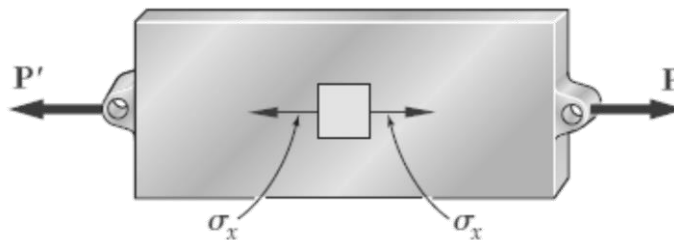
## 1.1 Objetivo

O presente trabalho tem por objetivo fazer o estudo de dois critérios de resistência para materiais dúcteis frequentemente usados no âmbito da resistência dos materiais: o critério da máxima tensão de cisalhamento, conhecido como Critério de Tresca e o critério da máxima energia de distorção proposto pelo engenheiro alemão Richard von Mises.

Após um estudo detalhado, é determinada a maior diferença entre os dois critérios de resistência para o estado plano de tensão, quando as tensões principais  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  forem positivas, uma vez que na literatura essa diferença é apresentada apenas para o caso de cisalhamento puro e, neste caso,  $\sigma_a$  é positiva e  $\sigma_b$ , negativa. Além disso, é realizado um comparativo entre os dois critérios para a verificação da diferença que existe na previsão da falha, quando o material está submetido a um estado geral de tensão.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

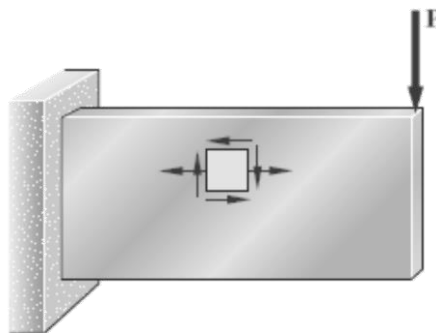
Os elementos estruturais compostos por materiais dúcteis são projetados de modo que esse material não escoe quando submetido a diferentes solicitações (BEER *et al.*, 2011). Um elemento solicitado por tensão uniaxial (Figura 1) está em segurança enquanto o valor da tensão normal  $\sigma_x$  for menor que a tensão de escoamento  $\sigma_Y$ , sendo que essa tensão  $\sigma_Y$  é obtida por ensaio de tração, usando um corpo de prova de mesmo material do elemento estrutural (BEER *et al.*, 2011).



**Figura 1 - Elemento sob estado de tensão uniaxial**

**Fonte: BEER *et al.* (2011).**

Quando o elemento está submetido a um estado plano de tensão (Figura 2) e também a um estado de tensão mais geral, não é possível prever sua segurança apenas pela comparação direta com ensaios de laboratório, uma vez que podem ocorrer inúmeras combinações de tensões (BEER *et al.*, 2011).



**Figura 2 - Elemento sob estado plano de tensão**

**Fonte: BEER *et al.* (2011).**

Os critérios de resistência baseados em teorias e ensaios de laboratório são capazes de analisar elementos submetidos a um estado de tensão multiaxial (MARTINS, 2018). No entanto, não existe um critério de resistência único que possa

ser aplicado a um material específico todas as vezes, porque um material pode comportar-se como dúctil ou frágil dependendo da temperatura, taxa de carregamento, ambiente químico ou processo de fabricação ou moldagem (HIBBELER, 2010). No presente estudo são apresentados os dois critérios de resistência mais usados frequentemente em materiais dúcteis: o critério da máxima tensão de cisalhamento e o critério da máxima energia de distorção.

Para aplicar um critério de resistência, o primeiro passo é calcular as componentes da tensão normal e de cisalhamento em pontos do elemento estrutural onde essas tensões são maiores (HIBBELER, 2010). Uma vez definido esse estado de tensão, determinam-se as tensões principais nesses pontos críticos, já que os critérios apresentados nesse trabalho são baseados nas tensões principais (HIBBELER, 2010).

## **2.1 Critério da máxima tensão de cisalhamento – Critério de Tresca**

O critério da máxima tensão de cisalhamento ou Critério de Tresca foi proposto pelo engenheiro Henri Tresca, em 1868, e é baseado na comprovação de que os materiais dúcteis falham por cisalhamento. Esse critério de resistência pode ser usado para prever a tensão de falha de um material dúctil sujeito a qualquer tipo de carga (HIBBELER, 2010).

Esse critério origina-se do fato de que o escoamento dos materiais dúcteis é provocado pelo deslizamento do material ao longo de superfícies oblíquas inclinadas de aproximadamente  $45^\circ$  em relação ao seu eixo, em razão, principalmente, das tensões de cisalhamento (BEER *et al.*, 2011). De acordo com esse critério, um componente estrutural está em segurança enquanto a tensão de cisalhamento máxima  $\tau_{m\acute{a}x}$  for menor que o valor da tensão de cisalhamento máxima  $\tau_Y$  em um corpo de prova de mesmo material que escoar em um ensaio de tração (BEER *et al.*, 2011). Para aplicar o critério, a tensão de cisalhamento máxima é expressa em termos das tensões principais (HIBBELER, 2010).

Para o estado plano de tensão, se as tensões principais forem ambas positivas ou ambas negativas a tensão máxima de cisalhamento é dada por:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{2} \quad (1)$$

Por outro lado, se as tensões principais tiverem sinais opostos, a tensão máxima de cisalhamento é dada por:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (2)$$

Em uma barra submetida a uma força axial centrada, a tensão de cisalhamento máxima é igual à metade da tensão axial normal correspondente (BEER *et al.*, 2011). Assim, a tensão de cisalhamento máxima em um corpo de prova em um ensaio de tração é dada por:

$$\tau_Y = \frac{\sigma_Y}{2} \quad (3)$$

Sendo  $\sigma_Y$  a tensão de escoamento.

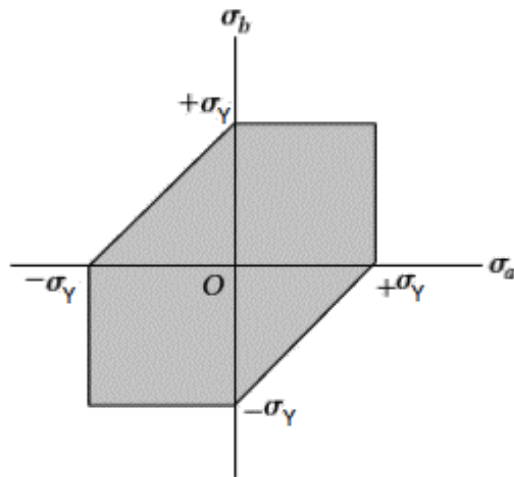
No estado plano de tensão uma tensão principal é nula. Assim, segundo Hibbeler (2010), o critério da máxima tensão de cisalhamento pode ser expresso em função das tensões principais não nulas. Chamando-se de  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  as tensões principais não nulas, tem-se:

$$\text{Se } \sigma_a \text{ e } \sigma_b \text{ têm o mesmo sinal } \left\{ \begin{array}{l} |\sigma_a| < \sigma_Y \\ |\sigma_b| < \sigma_Y \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\text{Se } \sigma_a \text{ e } \sigma_b \text{ têm sinais opostos } \left\{ |\sigma_a - \sigma_b| < \sigma_Y \right. \quad (5)$$

Na Figura 3 mostra-se a representação gráfica das relações obtidas pelas equações (4) e (5). Os pontos situados dentro da área mostrada na figura indicam que o componente estrutural está seguro e os pontos situados sobre ou fora dessa área indicam que o componente poderá falhar em decorrência do escoamento no material (BEER *et al.*, 2011). Essa representação gráfica relacionada ao início do escoamento no material é conhecida como hexágono de Tresca, em homenagem ao engenheiro Francês Henri Edouard Tresca (BEER *et al.*, 2011).





**Figura 3 - Hexágono de Tresca**

**Fonte: Adaptado de BEER *et al.* (2011).**

## 2.2 Critério da máxima energia de distorção – Critério de von Mises

O critério da máxima energia de distorção baseia-se na determinação da energia de distorção de um material relacionada a variações na sua forma, e foi proposto pelo matemático alemão-americano Richard von Mises (BEER *et al.*, 2011).

Segundo esse critério, um componente estrutural está em segurança desde que a energia de distorção por unidade de volume  $u_d$  no material seja menor que a energia de distorção por unidade de volume necessária para provocar escoamento  $(u_d)_Y$  em um corpo de prova do mesmo material submetido a um ensaio de tração (BEER *et al.*, 2011). De acordo com Hibbeler (2010), a energia de distorção por unidade de volume de um material  $u_d$  é dada por:

$$u_d = \frac{1 + \nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (6)$$

Sendo

$\nu$  o coeficiente de Poisson;

$E$  o módulo de elasticidade ou módulo de Young.

Para um corpo de prova que escoar em um ensaio de tração, as tensões principais são:  $\sigma_1 = \sigma_Y$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Dessa forma, a energia de distorção por unidade de volume de um material que escoar  $(u_d)_Y$  é dada por:

$$(u_d)_Y = \frac{1 + \nu}{3E} \sigma_Y^2 \quad (7)$$

Como já mencionado, para que um componente estrutural esteja em segurança,  $u_d < (u_d)_Y$ . Assim, tem-se que:

$$\frac{1 + \nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] < \frac{1 + \nu}{3E} \sigma_Y^2 \quad (8)$$

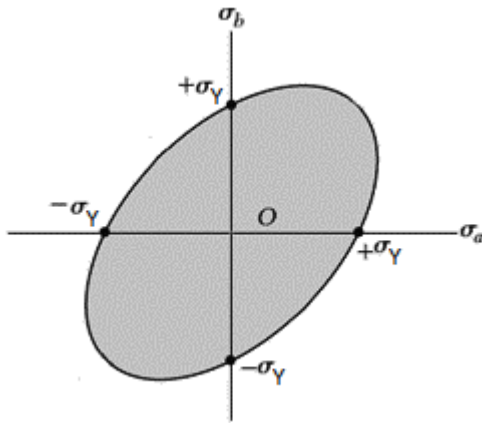
ou

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] < 2\sigma_Y^2 \quad (9)$$

No estado plano de tensão uma tensão principal é nula. Chamando-se de  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  as tensões principais não nulas, a equação (9) assume a forma:

$$(\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2) < \sigma_Y^2 \quad (10)$$

Essa equação representa uma curva elíptica como indicado na Figura 4. Os pontos situados dentro da área da elipse indicam que o componente estrutural está em segurança e os pontos situados sobre ou fora da elipse indicam que o componente poderá falhar.



**Figura 4 - Elipse de von Mises**

**Fonte: Adaptado de BEER et al. (2011).**

### 2.2.1 Critério da máxima energia de distorção em função das tensões não principais

O critério da máxima energia de distorção pode ser expresso em função das tensões não principais, ou seja, em função de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ . A seguir é feita a demonstração para obter a equação em função das tensões não principais.

A equação (9) obtida no item 2.2 está em função das tensões principais:

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] < 2\sigma_Y^2$$

Elevando-se essa equação ao quadrado, tem-se:

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_3\sigma_1 + \sigma_1^2 < 2\sigma_Y^2 \quad (11)$$

Agrupando-se os termos e dividindo-se o primeiro e segundo membro por dois, tem-se:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 < \sigma_Y^2 \quad (12)$$

Tem-se que o primeiro invariante de tensão é dado por:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (13)$$

Elevando-se os dois lados da equação (13) ao quadrado, tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1 \\ = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\sigma_x\sigma_y + 2\sigma_y\sigma_z + 2\sigma_x\sigma_z \end{aligned} \quad (14)$$

Isolando-se os termos  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$  da equação (14), tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = -2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_1 + \\ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\sigma_x\sigma_y + 2\sigma_y\sigma_z + 2\sigma_x\sigma_z \end{aligned} \quad (15)$$

Substituindo-se a equação (15) na equação (12), obtém-se:

$$\begin{aligned} -2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_1 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\sigma_x\sigma_y + 2\sigma_y\sigma_z + 2\sigma_x\sigma_z - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 \\ - \sigma_3\sigma_1 < \sigma_Y^2 \end{aligned}$$

ou

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\sigma_x\sigma_y + 2\sigma_y\sigma_z + 2\sigma_x\sigma_z - 3(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) < \sigma_Y^2 \quad (16)$$

Tem-se que o segundo invariante de tensão é dado por:

$$\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2 \quad (17)$$

Substituindo-se a equação (17) na equação (16), tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\sigma_x\sigma_y + 2\sigma_y\sigma_z + 2\sigma_x\sigma_z - 3(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z \\ - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2) < \sigma_Y^2 \end{aligned} \quad (18)$$

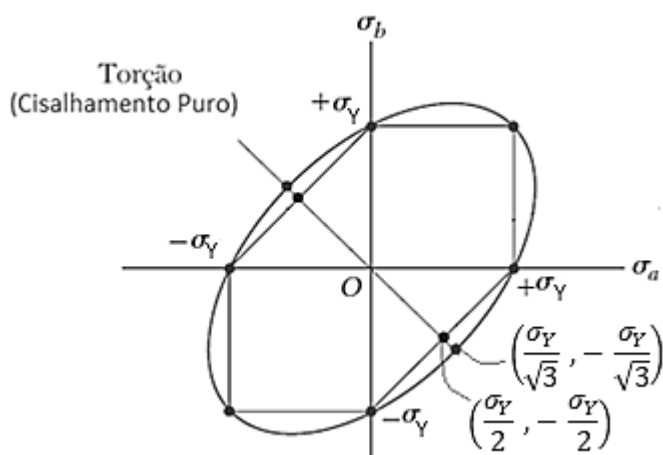
Assim, tem-se finalmente:

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_x\sigma_z + 3(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xy}^2) < \sigma_Y^2 \quad (19)$$

A equação (19) expressa o critério da máxima energia de distorção (critério de von Mises) em termos das tensões não principais.

### 2.3 Comparação entre os critérios de Tresca e von Mises

A comparação entre os dois critérios para materiais dúcteis em um estado plano de tensão é mostrada na Figura 5.

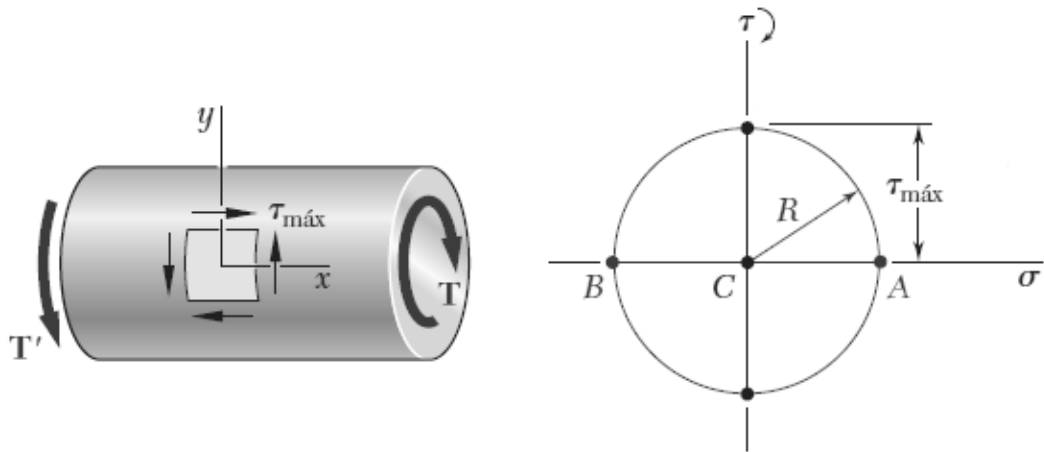


**Figura 5 - Comparação entre os critérios da máxima tensão de cisalhamento e da máxima energia de distorção**

**Fonte: Adaptado de BEER *et al.* (2011).**

Na Figura 5, observa-se que a elipse passa pelos vértices do hexágono e por esse motivo os dois critérios apresentam os mesmos resultados para os estados de tensão indicados por esses seis pontos (BEER *et al.*, 2011). No entanto, nota-se que ocorre uma discordância entre os critérios para qualquer outro estado de tensão, sendo o critério da máxima tensão de cisalhamento mais conservador que o critério da máxima energia de distorção (BEER *et al.*, 2011).

A maior discrepância apresentada entre os dois critérios é quando um material está submetido a cisalhamento puro ( $\tau$ ) (HIBBELER, 2010). O estado de tensão relacionado à torção de um elemento e a circunferência de Mohr associada a esse estado podem ser observados na Figura 6.



**Figura 6 - Circunferência de Mohr para carga torcional**

**Fonte: BEER *et al.* (2011).**

A circunferência de Mohr mostrada na Figura 6 é uma circunferência de raio  $R = \tau_{máx}$  e centrada na origem. Os pontos A e B definem os planos principais e as tensões principais são dadas por:

$$\sigma_{1,2} = \pm R = \pm \tau_{máx} \quad (20)$$

Dessa forma, tem-se que na torção:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 \quad (21)$$

ou ainda em termos de  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$ :

$$\sigma_b = -\sigma_a \quad (22)$$

Os pontos correspondentes a esse estado de tensão mostrado na Figura 5 estão localizados no bissetor do segundo e quarto quadrantes (BEER *et al.*, 2011). As coordenadas da tensão desses pontos sobre as curvas são determinadas aplicando-se as equações (5) e (10).

Aplicando a equação (5), de acordo com o critério da máxima tensão de cisalhamento (critério de Tresca), o escoamento ocorre quando:

$$|\sigma_a - \sigma_b| = \sigma_Y$$

$$|\sigma_a - (-\sigma_a)| = \sigma_Y$$

$$\sigma_a = -\sigma_b = \pm \frac{\sigma_Y}{2} \quad (23)$$

Aplicando a equação (10), de acordo com o critério da máxima energia de distorção (critério de von Mises) o escoamento ocorre quando:

$$\begin{aligned} (\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2) &= \sigma_Y^2 \\ [\sigma_a^2 - \sigma_a(-\sigma_a) + (-\sigma_a)^2] &= \sigma_Y^2 \\ \sigma_a = -\sigma_b &= \pm \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (24)$$

Lembrando novamente da Figura 6, nota-se que  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  devem ser iguais em intensidade à tensão de cisalhamento máxima  $\tau_{m\acute{a}x}$  (BEER *et al.*, 2011). Assim, tem-se a seguinte relação:

$$\frac{\tau_{m\acute{a}x\ von\ Mises}}{\tau_{m\acute{a}x\ Tresca}} = \frac{\frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}}{\frac{\sigma_Y}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,1547 \quad (25)$$

A partir da equação (25), conclui-se que o valor da tensão de cisalhamento que provoca o escoamento do material segundo o critério da máxima energia de distorção é 15,47% maior do que o valor fornecido pelo critério da máxima tensão de cisalhamento. De acordo com Hibbeler (2010), ensaios reais de torção em um corpo de prova de material dúctil utilizando uma condição de cisalhamento puro, mostram que o critério da máxima energia de distorção fornece resultados mais precisos para falha por cisalhamento puro do que o critério da máxima tensão de cisalhamento. Dessa forma, pode-se considerar que o critério de von Mises é 15,47% mais preciso que o critério de Tresca.

### 2.3.1 Exemplo de aplicação

O exemplo de aplicação foi retirado da Apostila de Resistência dos Materiais II do Professor Jaime Florencio Martins – Universidade Federal de Ouro Preto, Escola de Minas, Departamento de Engenharia Civil.

Sabendo que a tensão de escoamento  $\sigma_Y = 240$  MPa, calcular o valor do momento de torção que inicia o escoamento do eixo de comprimento igual a 2,0 m e seção circular com diâmetro de 25 mm mostrado na Figura 7, utilizando o critério da máxima tensão de cisalhamento e da máxima energia de distorção.

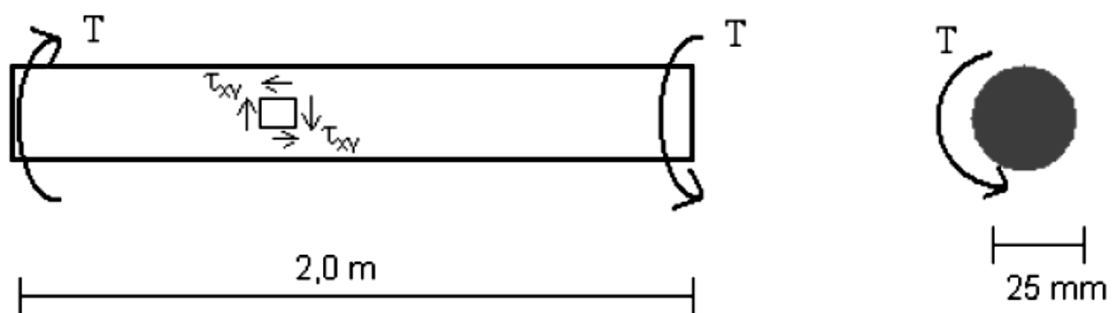


Figura 7 - Barra submetida à torção pura

Fonte: MARTINS (2018).

O momento de torção aplicado na barra circular provoca uma tensão de cisalhamento, dada pela seguinte equação:

$$\tau = \frac{T \cdot r}{J} \quad (26)$$

Sendo

T o momento torçor;

r o raio da seção transversal da barra;

J o momento polar de inércia da seção transversal, dado por  $J = \frac{\pi d^4}{32}$ .

Aplicando os valores na equação (26), tem-se:



$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot 12,5}{\frac{\pi (25)^4}{32}}$$

$$\tau_{xy} = 3,2595 \times 10^{-4} T \quad (27)$$

1) Aplicando o critério de von Mises (máxima energia de distorção):

Sabe-se que o critério de von Mises em termos de tensões não principais é dado pela equação (19) a seguir, obtida no item 2.2.1 desse trabalho.

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_x\sigma_z + 3(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xy}^2) < \sigma_Y^2$$

Como o exemplo é de cisalhamento puro, a única parcela diferente de zero é  $\tau_{xy}^2$ . Assim, tem-se:

$$3(\tau_{xy}^2) < \sigma_Y^2 \quad (28)$$

Substituindo-se os valores na equação (28), tem-se:

$$3(3,2595 \times 10^{-4} T)^2 = 240^2$$

$$T^2 = \frac{57600}{3,1873 \times 10^{-7}}$$

$$T = 425.109 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

2) Aplicando o critério de Tresca (máxima tensão de cisalhamento):

Sabe-se que o critério de Tresca é representado pela equação (29) a seguir:

$$\sigma_1 - \sigma_3 < \sigma_Y \quad (29)$$

Utilizando a circunferência de Mohr para o estado plano de tensão, pode-se obter a equação (30) para calcular, analiticamente, as tensões extremas  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ :

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (30)$$

Como o exemplo trata-se do caso de cisalhamento puro, tem-se:

$$\sigma_{1,3} = \pm \sqrt{\tau_{xy}^2} \quad (31)$$

Substituindo valores:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= +\tau_{xy} = 3,2595 \times 10^{-4} \text{ T} \\ \sigma_3 &= -\tau_{xy} = -3,2595 \times 10^{-4} \text{ T} \end{aligned} \quad (32)$$

Lembrando que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  e que a barra está sendo analisada no estado plano de tensão, as três tensões principais assumem os seguintes valores:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= +3,2595 \times 10^{-4} \text{ T} \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= -3,2595 \times 10^{-4} \text{ T} \end{aligned}$$

Aplicando as três tensões principais no critério de Tresca expresso pela equação (29), e substituindo valores, tem-se:

$$\begin{aligned} +3,2595 \times 10^{-4} \text{ T} - (-3,2595 \times 10^{-4} \text{ T}) &= 240 \\ T &= 368.155 \text{ N.mm} \end{aligned}$$

Após a determinação dos valores encontrados para os dois critérios, pode-se fazer a comparação entre eles através da seguinte relação:

$$\frac{T_{von\ Mises}}{T_{Tresca}} = \frac{425.109 \text{ N.mm}}{368.155 \text{ N.mm}} = 1,1547$$

Obtida a relação entre os dois critérios, conclui-se que o momento de torção que inicia o escoamento do eixo segundo o critério da máxima energia de distorção (critério

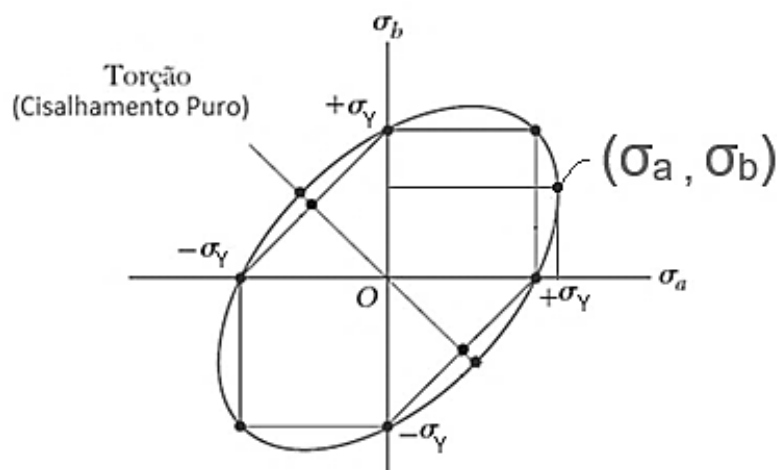
de von Mises) é 15,47% maior do que o valor fornecido pelo critério da máxima tensão de cisalhamento (critério de Tresca).

Portanto, observa-se que a maior diferença entre os dois critérios de resistência mais usados para materiais dúcteis, quando aplicados às barras solicitadas por cisalhamento puro, é de 15,47%. Esse resultado é conhecido e pode ser encontrado em diversos livros de Resistência dos Materiais.

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 Comparação entre os critérios de Tresca e von Mises para o estado plano de tensão quando as tensões principais $\sigma_a$ e $\sigma_b$ são positivas

Embora a literatura apresente a discrepância entre os critérios da máxima tensão de cisalhamento e da máxima energia de distorção apenas para o caso de cisalhamento puro, é possível fazer uma análise fora desse estado de tensão. Dessa forma, a comparação entre os dois critérios de resistência para materiais dúcteis em um estado plano de tensão pode ser realizada quando o material está submetido à tração, ou seja, quando as tensões principais  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  são positivas. Esse comparativo pode ser feito encontrando-se o maior valor da tensão principal  $\sigma_a$  mostrado na Figura 8.



**Figura 8 - Comparação entre os critérios da máxima tensão de cisalhamento e da máxima energia de distorção quando as tensões principais  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  são positivas**

**Fonte: Adaptado de BEER *et al.* (2011).**

Para encontrar os valores das tensões principais  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  referentes ao ponto mostrado na Figura 8, utilizou-se a equação (10), que descreve a curva da elipse de acordo com o critério de von Mises. Arbitrou-se valores de  $\sigma_b$  entre  $0,45\sigma_Y$  e  $0,60\sigma_Y$ , uma vez que o maior valor de  $\sigma_a$  correspondente está aproximadamente nessa faixa. Os cálculos foram realizados no programa Microsoft Excel.

Após determinar o maior valor da tensão principal  $\sigma_a$ , foi feita a comparação entre os critérios de Tresca e von Mises, encontrando-se, assim, a maior discrepância entre os dois critérios.

### 3.2 Comparação entre os critérios de Tresca e von Mises para o estado geral de tensão

Como visto, a maior discrepância entre os critérios de von Mises e Tresca para o estado plano de tensão pode ser encontrada na literatura. No entanto, a diferença entre esses dois critérios para o estado geral de tensão não é conhecida, sendo objetivo desse trabalho determiná-la.

Para isso, foram definidos vários estados de tensão, com componentes de tensão normal e de cisalhamento diferentes. Em seguida, calcularam-se as tensões principais dos estados de tensão definidos, já que os critérios de resistência a serem comparados nesse trabalho são baseados nas tensões principais.

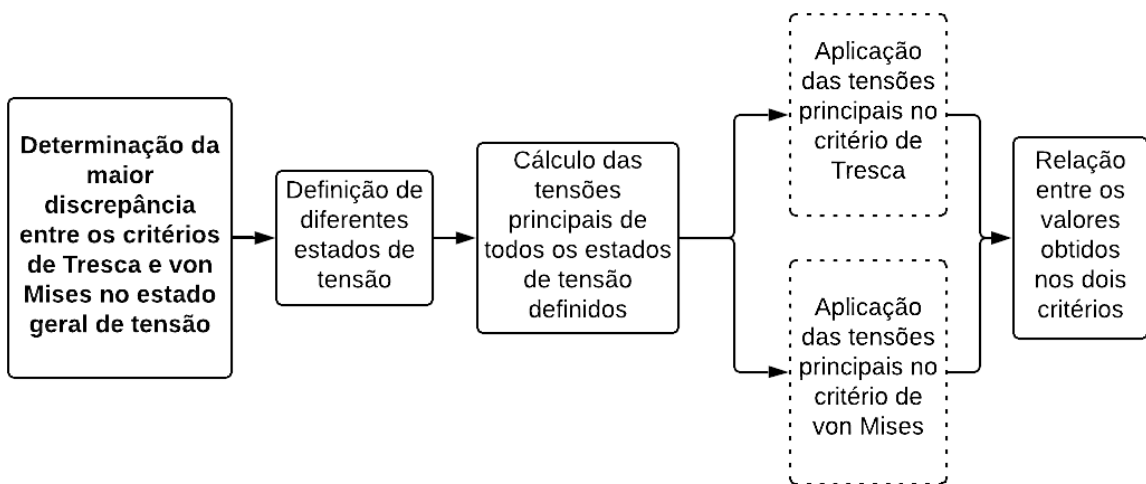
Segundo Martins (2018), em um elemento estrutural com tensões nas três dimensões, as tensões principais podem ser calculadas pela equação de terceiro grau a seguir:

$$\begin{aligned} \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2)\sigma \\ + (-\sigma_x\sigma_y\sigma_z - 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} + \sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{xz}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

A equação (33) fornece três raízes reais que são as tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  do estado geral de tensão.

Feito isso, os valores das tensões principais encontrados para cada estado de tensão definido foram aplicados nas equações dos critérios de von Mises e Tresca. As relações desses valores foram obtidas, permitindo-se determinar a maior diferença entre eles. Para facilitar os cálculos, utilizou-se o programa Microsoft Excel, no qual foi criada uma planilha de cálculo. Essa planilha de cálculo pode ser visualizada no Apêndice A.

Essa metodologia adotada está representada esquematicamente na Figura 9.



**Figura 9 - Esquema da metodologia adotada**

**Fonte: autora (2019).**

## 4 RESULTADOS

### 4.1 Comparação entre os critérios de Tresca e von Mises para o estado plano de tensão, quando as tensões principais $\sigma_a$ e $\sigma_b$ são positivas

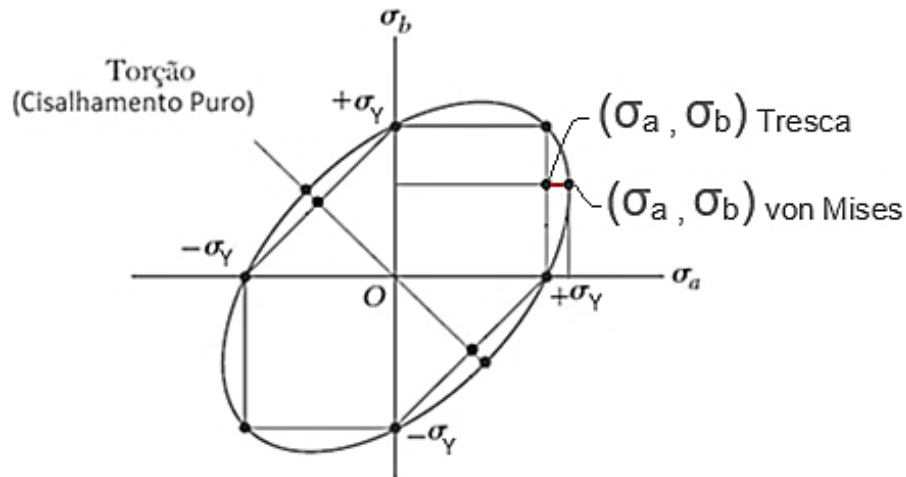
Arbitrando-se valores de  $\sigma_b$  entre  $0,45\sigma_Y$  e  $0,60\sigma_Y$ , e aplicando esses valores na equação (10) da curva da elipse, foram encontrados os valores dispostos na Tabela 1.

**Tabela 1 - Resultados obtidos no programa Microsoft Excel utilizando o critério de von Mises. Fonte: autora (2019).**

$\sigma_b$ ( $\times \sigma_Y$ )	$\sigma_a$ ( $\times \sigma_Y$ )
0,450000	1,14593702281969
0,460000	1,14722407295055
0,470000	1,14841392588465
0,480000	1,14950536007217
0,490000	1,15049710104450
0,500000	1,15138781886600
0,510000	1,15217612540682
0,520000	1,15286057142199
0,530000	1,15343964341986
0,540000	1,15391176030190
0,550000	1,15427526975345
0,560000	1,15452844436302
0,570000	1,15466947744531
0,577000	1,15470046755933
0,577300	1,15470053692033
0,577340	1,15470053831837
0,577345	1,15470053836322
0,577349	1,15470053837832
<b>0,577350</b>	<b>1,15470053837921</b>
0,577351	1,15470053837894
0,577400	1,15470053695133
0,577500	1,15470052543433
0,578000	1,15470029455927
0,580000	1,15469647854030
0,590000	1,15460746855760
0,600000	1,15440037453175

Analisando a Tabela 1, pode-se observar que o maior valor da tensão principal  $\sigma_a$  encontrada foi  $1,15470053837921 \times \sigma_Y$  e o valor correspondente de  $\sigma_b$  é  $0,577350 \times \sigma_Y$ .

A maior diferença entre os dois critérios de resistência é mostrada na Figura 10.



**Figura 10 - Representação da maior diferença entre os critérios de Tresca e von Mises quando as tensões principais são positivas.**

**Fonte: Adaptado de BEER *et al.* (2011).**

Os valores de  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  para os pontos mostrados na Figura 10 são:

$$\text{Critério de Tresca: } \begin{cases} \sigma_a = \sigma_Y \\ \sigma_b = 0,57735 \times \sigma_Y \end{cases} \quad (34)$$

$$\text{Critério de von Mises: } \begin{cases} \sigma_a = 1,15470053837921 \times \sigma_Y \\ \sigma_b = 0,57735 \times \sigma_Y \end{cases}$$

Na Figura 10, nota-se que a maior discrepância entre os dois critérios é determinada pela relação entre os valores de  $\sigma_a$ . Assim, a relação entre a tensão principal  $\sigma_a$  para o critério de von Mises e para o critério de Tresca é:

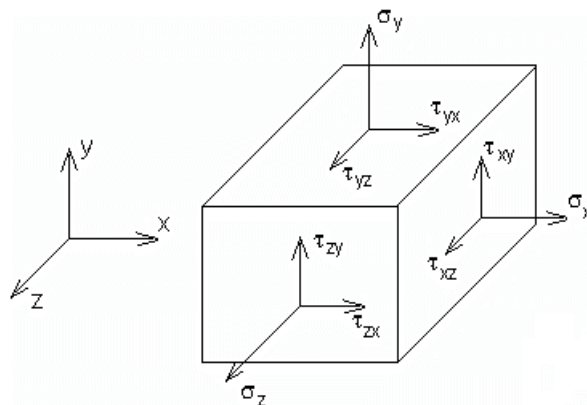
$$\frac{\sigma_{a_{von\ Mises}}}{\sigma_{a_{Tresca}}} = \frac{1,15470053837921 \times \sigma_Y}{1 \times \sigma_Y} = 1,15470053837921 \cong 1,1547 \quad (35)$$



A partir da equação (35), conclui-se que o valor da tensão principal  $\sigma_a$  que provoca o escoamento do material segundo o critério de von Mises é 15,47% maior do que o valor fornecido pelo critério de Tresca. Além disso, nota-se que a maior discrepância entre os dois critérios de resistência quando o material está submetido a tração é igual quando o material está submetido a cisalhamento puro, como descrito na literatura.

#### 4.2 Comparação entre os critérios de Tresca e von Mises para o estado geral de tensão

O estado geral de tensão possui nove componentes de tensão: três componentes normais ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ ) e seis componentes cisalhantes ( $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{zy}$ ) (MARTINS, 2018). Na Figura 11 indicam-se as nove componentes de tensão e o sentido positivo de cada uma.



**Figura 11 - Representação do estado geral de tensão e do sentido positivo dos componentes de tensão normal e de cisalhamento.**

**Fonte: MARTINS (2018).**

No entanto, pelo teorema de Cauchy ( $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ), o estado geral de tensão fica em função de seis componentes, uma vez que  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  e  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$  (MARTINS, 2018).

Sabendo disso, os estados de tensão em três dimensões utilizados para fazer a comparação entre os critérios de Tresca e von Mises foram definidos de três formas:

estados de tensão com apenas tensão de cisalhamento, estados de tensão com apenas tensão normal e estados de tensão com componentes de tensão normal e de cisalhamento.

#### 4.2.1 Estados de tensão com apenas tensão de cisalhamento

Foram definidos diferentes estados de tensão com as componentes de tensão de cisalhamento  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ . Os resultados obtidos estão dispostos nas Tabelas 2, 3, 4 e 5.

**Tabela 2 - Resultados obtidos. Fonte: autora (2019).**

$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\tau_{yz}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	Diferença entre os critérios de von Mises e Tresca (%)
0	0	0	5	5	5	10,00	-5,00	-5,00	0,00%
0	0	0	65	65	65	130,00	-65,00	-65,00	0,00%
0	0	0	300	300	300	600,00	-300,00	-300,00	0,00%
0	0	0	1000	1000	1000	2000,00	-1000,00	-1000,00	0,00%
0	0	0	-50	-50	-50	50,00	50,00	-100,00	0,00%

Como mostrado na Tabela 2, quando os valores de tensão de cisalhamento são iguais, não há diferença entre os critérios de resistência de von Mises e Tresca.

**Tabela 3 - Resultados obtidos. Fonte: autora (2019).**

$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\tau_{yz}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	Diferença entre os critérios de von Mises e Tresca (%)
0	0	0	1	2	3	4,11	-0,91	-3,20	12,87%
0	0	0	10	20	30	41,13	-9,11	-32,02	12,87%
0	0	0	100	200	300	411,31	-91,12	-320,19	12,87%
0	0	0	1	5	10	11,60	-0,80	-10,80	15,25%
0	0	0	10	50	100	116,03	-7,98	-108,05	15,25%
0	0	0	100	500	1000	1160,25	-79,77	-1080,49	15,25%

Analisando a Tabela 3, observa-se que aumentando proporcionalmente os valores de tensão de cisalhamento, a diferença entre os critérios de resistência se mantém a mesma, independente da proporção utilizada.

**Tabela 4 - Resultados obtidos. Fonte: autora (2019).**

$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$T_{xy}$	$T_{xz}$	$T_{yz}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	Diferença entre os critérios de von Mises e Tresca (%)
0	0	0	100	100	20	151,77	-20,00	-131,77	14,62%
0	0	0	100	20	100	151,77	-20,00	-131,77	14,62%
0	0	0	20	100	100	151,77	-20,00	-131,77	14,62%
0	0	0	-10	60	90	103,72	9,22	-112,94	15,16%
0	0	0	90	-10	60	103,72	9,22	-112,94	15,16%
0	0	0	60	90	-10	103,72	9,22	-112,94	15,16%

Considerando três valores quaisquer de componentes de tensão de cisalhamento  $T_{xy}$ ,  $T_{xz}$  e  $T_{yz}$ , e alternando esses valores entre si, não há mudança na diferença entre os critérios de resistência, como pode-se observar na Tabela 4.

**Tabela 5 - Resultados obtidos. Fonte: autora (2019).**

$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$T_{xy}$	$T_{xz}$	$T_{yz}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	Diferença entre os critérios de von Mises e Tresca (%)
0	0	0	21	22	23	44,01	-20,85	-23,16	1,70%
0	0	0	150	160	170	320,14	-148,52	-171,62	2,32%
0	0	0	20	25	30	50,22	-19,35	-30,88	6,72%
0	0	0	1000	1500	1800	2891,00	-974,76	-1916,24	8,95%
0	0	0	2	3	4	6,07	-1,89	-4,19	10,03%
0	0	0	100	200	300	411,31	-91,12	-320,19	12,87%
0	0	0	50	60	150	183,07	-32,69	-150,38	13,84%
0	0	0	10	-90	60	103,72	9,22	-112,94	15,16%
0	0	0	15	300	90	317,61	-8,24	-309,37	15,44%
0	0	0	60	1000	200	1032,88	-23,01	-1009,87	15,45%
0	0	0	30	1000	300	1052,62	-16,50	-1036,11	15,46%
0	0	0	1	94,5	5	94,69	-0,11	-94,58	15,47%
0	0	0	95	-1	90	130,36	1,00	-131,36	15,47%
0	0	0	1000	30	90	1007,16	-5,35	-1001,80	15,47%
0	0	0	-10	-60	500	504,86	-2,37	-502,50	15,47%

Na Tabela 5 é possível notar que definindo diferentes estados de tensão com componentes de tensão de cisalhamento, a diferença entre os critérios de resistência de Tresca e von Mises para o estado geral de tensão é no máximo 15,47%. Esse valor de discrepância entre os critérios é o mesmo encontrado na literatura para o estado plano de tensão.

#### 4.2.2 Estados de tensão com apenas tensão normal

Foram definidos diferentes estados de tensão com as componentes de tensão normal  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ . Os resultados obtidos estão dispostos nas Tabelas 6, 7, 8 e 9.

**Tabela 6 - Resultados obtidos. Fonte: autora (2019).**

$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$T_{xy}$	$T_{xz}$	$T_{yz}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	Diferença entre os critérios de von Mises e Tresca (%)
1	1	250	0	0	0	250,00	1,00	1,00	0,00%
400	1000	400	0	0	0	1000,00	400,00	400,00	0,00%
2000	10	10	0	0	0	2000,00	10,00	10,00	0,00%
35	900	35	0	0	0	900,00	35,00	35,00	0,00%
6	2	2	0	0	0	6,00	2,00	2,00	0,00%

Para o estado geral de tensão com duas componentes de tensão normal iguais e uma diferente, independente dos valores arbitrados, o resultado dos critérios de resistência são iguais, ou seja, a diferença entre eles é nula. Esse caso é mostrado na Tabela 6.

**Tabela 7 - Resultados obtidos. Fonte: autora (2019).**

$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$T_{xy}$	$T_{xz}$	$T_{yz}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	Diferença entre os critérios de von Mises e Tresca (%)
1	2	5	0	0	0	5,00	2,00	1,00	10,94%
10	20	50	0	0	0	50,00	20,00	10,00	10,94%
100	200	500	0	0	0	500,00	200,00	100,00	10,94%
1	10	100	0	0	0	100,00	10,00	1,00	4,41%
10	100	1000	0	0	0	1000,00	100,00	10,00	4,41%
100	1000	10000	0	0	0	10000,00	1000,00	100,00	4,41%

Analisando os dados da Tabela 7, nota-se que, quando os valores de tensão normal são aumentados proporcionalmente, a diferença entre os critérios de resistência se mantém a mesma, independente da proporção utilizada.

**Tabela 8 - Resultados obtidos. Fonte: autora (2019).**

$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$T_{xy}$	$T_{xz}$	$T_{yz}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	Diferença entre os critérios de von Mises e Tresca (%)
-5	60	30	0	0	0	60,00	30,00	-5,00	15,36%
30	-5	60	0	0	0	60,00	30,00	-5,00	15,36%
60	30	-5	0	0	0	60,00	30,00	-5,00	15,36%
500	20	60	0	0	0	500,00	60,00	20,00	4,05%
60	500	20	0	0	0	500,00	60,00	20,00	4,05%
20	60	500	0	0	0	500,00	60,00	20,00	4,05%

Arbitrando três valores quaisquer de componentes de tensão normal  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ , e alternando esses valores entre si, a diferença entre os critérios de resistência não muda, como pode-se observar na Tabela 8.

**Tabela 9 - Resultados obtidos. Fonte: autora (2019).**

$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\tau_{yz}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	Diferença entre os critérios de von Mises e Tresca (%)
3	30	5	0	0	0	30,00	5,00	3,00	3,62%
1	10	100	0	0	0	100,00	10,00	1,00	4,41%
50	180	200	0	0	0	200,00	180,00	50,00	6,33%
60	500	600	0	0	0	600,00	500,00	60,00	8,52%
10	20	50	0	0	0	50,00	20,00	10,00	10,94%
1	20	30	0	0	0	30,00	20,00	1,00	13,66%
500	200	0	0	0	0	500,00	200,00	0,00	14,71%
1	2	0	0	0	0	2,00	1,00	0,00	15,47%
600	650	700	0	0	0	700,00	650,00	600,00	15,47%
-30	-60	-45	0	0	0	-30,00	-45,00	-60,00	15,47%
250	500	750	0	0	0	750,00	500,00	250,00	15,47%

Análogo ao que acontece com os estados de tensão com apenas tensão de cisalhamento, observa-se na Figura 9 que, determinando-se diferentes estados de tensão com componentes de tensão normal, a maior discrepância entre os critérios de resistência de Tresca e von Mises para o estado geral de tensão é 15,47%. Essa diferença é a mesma encontrada na literatura para o estado plano de tensão.

#### 4.2.3 Estados de tensão com componentes de tensão normal e de cisalhamento

Foram definidos estados de tensão com as componentes de tensão normal  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  e com as componentes de tensão de cisalhamento  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ . Os resultados obtidos estão dispostos nas Tabelas 10, 11 e 12.

**Tabela 10 - Resultados obtidos. Fonte: autora (2019).**

$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\tau_{yz}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	Diferença entre os critérios de von Mises e Tresca (%)
25	25	25	10	10	10	45,00	15,00	15,00	0,00%
100	100	100	35	35	35	170,00	65,00	65,00	0,00%
10	10	10	500	500	500	1010,00	-490,00	-490,00	0,00%

Como pode ser visto na Tabela 10, a diferença entre os critérios de Tresca e von Mises é nula quando as componentes de tensão normal são iguais entre si e as componentes de tensão de cisalhamento também são iguais entre si.

**Tabela 11 - Resultados obtidos. Fonte: autora (2019).**

$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$T_{xy}$	$T_{xz}$	$T_{yz}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	Diferença entre os critérios de von Mises e Tresca (%)
10	20	30	60	60	60	140,37	-34,41	-45,96	3,04%
30	10	20	60	60	60	140,37	-34,41	-45,96	3,04%
20	30	10	60	60	60	140,37	-34,41	-45,96	3,04%
100	100	100	20	60	80	210,19	80,86	8,94	13,94%
100	100	100	80	20	60	210,19	80,86	8,94	13,94%
100	100	100	60	80	20	210,19	80,86	8,94	13,94%

Na Tabela 11 apresenta-se a junção do que acontece nos subitens 4.2.1 e 4.2.2. Quando as tensões cisalhantes são iguais e alternam-se as tensões normais, a diferença entre os critérios se mantém. O contrário também acontece, ou seja, quando as tensões normais são iguais e alternam-se as tensões cisalhantes, a diferença entre os critérios se mantém.

**Tabela 12 - Resultados obtidos. Fonte: autora (2019).**

$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$T_{xy}$	$T_{xz}$	$T_{yz}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	Diferença entre os critérios de von Mises e Tresca (%)
1	2	3	100	120	140	242,82	-95,91	-140,90	5,61%
25	350	1000	30	250	500	1314,07	133,67	-72,73	7,01%
0	0	100	100	200	300	458,06	-89,38	-268,68	10,83%
0	100	0	100	200	300	450,33	-61,51	-288,82	12,72%
200	20	250	90	10	150	342,62	202,98	-75,59	13,40%
100	0	0	100	200	300	436,49	-21,84	-314,64	14,55%
1	10	100	5	5	500	557,11	0,91	-447,02	15,25%
500	30	320	100	200	300	726,96	282,04	-159,00	15,47%
1	10	100	5	5	4000	4055,27	0,99	-3945,25	15,47%

Observando a Tabela 12 e novamente conforme visto nos subitens 4.2.1 e 4.2.2, nota-se que a maior discrepância entre os critérios de resistência de Tresca e von Mises para o estado geral de tensão é 15,47%. Essa diferença é a mesma encontrada na literatura para o estado plano de tensão.

## 5 CONCLUSÃO

Após fazer o estudo literário dos dois critérios de resistência frequentemente utilizados para materiais dúcteis: o critério da máxima tensão de cisalhamento (Critério de Tresca) e o critério da máxima energia de distorção (Critério de von Mises), concluiu-se que a diferença máxima apresentada entre eles no estado plano de tensão para o caso de cisalhamento puro é de 15,47%. Além disso, foi possível constatar que o critério de Tresca é mais conservador que o critério de von Mises, ou seja, o valor da tensão de cisalhamento que provoca o escoamento do material segundo o critério de Tresca é 15,47% menor do que o valor fornecido pelo critério de von Mises.

Como na literatura a relação entre os dois critérios de resistência é apresentada apenas para o caso de cisalhamento puro, esse trabalho propôs uma metodologia para encontrar a maior discrepância para o caso de tração, ou seja, quando as tensões principais  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  são positivas. Fazendo essa comparação, o valor encontrado foi novamente de 15,47%. Assim, concluiu-se que, no estado plano de tensão, a maior diferença entre os dois critérios de resistência quando o material está submetido à tração é igual a quando o material está submetido a um estado de cisalhamento puro.

Visando fazer o comparativo da previsão de falha dos dois critérios de resistência para o estado geral de tensão, uma planilha de cálculo foi desenvolvida no programa Microsoft Excel. Por meio dela, foi possível determinar a relação existente entre os dois critérios para diferentes estados de tensão. Após realizar vários testes com valores diferentes de componentes de tensão, conclui-se que a maior discrepância encontrada entre os dois critérios estudados para o estado geral de tensão é de 15,47%.

## REFERÊNCIAS

BEER, F. P.; JOHNSTON JR., E. R.; DEWOLF, J. T.; MAZUREK, D. F. **Mecânica dos Materiais**. 5ª. ed. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda, 2011.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 7ª. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

MARTINS, J. F. **Resistência dos Materiais II**. Notas de aula. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto: UFOP, 2018.

MORALES, E. D. **Análise de critérios de falha em materiais dúcteis: um estudo numérico e experimental**. Dissertação de Mestrado. São Paulo: Poli-USP, 2013.

SHIEL, F. **Introdução à Resistência dos Materiais**. São Paulo: HARBRA, 1984.



## APÊNDICE A

CÁLCULO DAS TENSÕES PRINCIPAIS PARA O ESTADO GERAL DE TENSÕES																																
<p>Segundo Martins (2018), em um elemento estrutural com tensões nas três dimensões, as tensões principais podem ser calculadas pela equação de terceiro grau abaixo:</p> $\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2)\sigma + (-\sigma_x\sigma_y\sigma_z - 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} + \sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{xz}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0$ <p>A equação do terceiro grau acima fornece três raízes reais que são as tensões principais do estado geral de tensões. Utilizaremos o método de Cardano, apresentado por Martins (2018), para calcular essas raízes, considerando todas as raízes reais.</p>																																
CÁLCULO					SOLUÇÃO																											
<p style="text-align: center;">Entre com os valores em MPa:</p> <table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;"><math>\sigma_x</math></td> <td style="padding: 2px 5px;">500</td> <td style="padding: 2px 5px;"><math>\tau_{xy}</math></td> <td style="padding: 2px 5px;">100</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;"><math>\sigma_y</math></td> <td style="padding: 2px 5px;">30</td> <td style="padding: 2px 5px;"><math>\tau_{xz}</math></td> <td style="padding: 2px 5px;">200</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;"><math>\sigma_z</math></td> <td style="padding: 2px 5px;">320</td> <td style="padding: 2px 5px;"><math>\tau_{yz}</math></td> <td style="padding: 2px 5px;">300</td> </tr> </table>										$\sigma_x$	500	$\tau_{xy}$	100	$\sigma_y$	30	$\tau_{xz}$	200	$\sigma_z$	320	$\tau_{yz}$	300	<p style="text-align: center;">As três raízes reais são:</p> <table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;"><math>X_1 = \sigma_1</math></td> <td style="padding: 2px 5px; color: red;"><b>726,96</b></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;"><math>X_2 = \sigma_2</math></td> <td style="padding: 2px 5px; color: red;"><b>282,04</b></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;"><math>X_3 = \sigma_3</math></td> <td style="padding: 2px 5px; color: red;"><b>-159,00</b></td> </tr> </table>					$X_1 = \sigma_1$	<b>726,96</b>	$X_2 = \sigma_2$	<b>282,04</b>	$X_3 = \sigma_3$	<b>-159,00</b>
$\sigma_x$	500	$\tau_{xy}$	100																													
$\sigma_y$	30	$\tau_{xz}$	200																													
$\sigma_z$	320	$\tau_{yz}$	300																													
$X_1 = \sigma_1$	<b>726,96</b>																															
$X_2 = \sigma_2$	<b>282,04</b>																															
$X_3 = \sigma_3$	<b>-159,00</b>																															
<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>P</b>	<b>Q</b>	<b>e</b>	<b>Y<sub>1</sub></b>	<b>Y<sub>2</sub></b>	<b>Y<sub>3</sub></b>																								
-850,00	44600,00	32600000,00	65411,11	127037,04	1,56	443,63	-1,29	-442,33																								
CÁLCULO DA DIFERENÇA ENTRE OS CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA DE TRESCA E VON MISES																																
<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr style="background-color: #cccccc;"> <th colspan="4" style="text-align: center; padding: 2px 5px;">Valor de <math>\sigma_V</math> (MPa)</th> </tr> <tr style="background-color: #cccccc;"> <th style="padding: 2px 5px;">von Mises</th> <th style="padding: 2px 5px;">Tresca</th> <th style="padding: 2px 5px;">Relação</th> <th style="padding: 2px 5px;">Diferença</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="padding: 2px 5px; text-align: center;">767,27</td> <td style="padding: 2px 5px; text-align: center;">885,96</td> <td style="padding: 2px 5px; text-align: center;">1,1547</td> <td style="padding: 2px 5px; text-align: center; color: red;"><b>15,47%</b></td> </tr> </tbody> </table>										Valor de $\sigma_V$ (MPa)				von Mises	Tresca	Relação	Diferença	767,27	885,96	1,1547	<b>15,47%</b>											
Valor de $\sigma_V$ (MPa)																																
von Mises	Tresca	Relação	Diferença																													
767,27	885,96	1,1547	<b>15,47%</b>																													