



**UFOP**

Universidade Federal  
de Ouro Preto

**Universidade Federal de Ouro Preto  
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas  
Departamento de Computação e Sistemas**

## **Q-bit: um novo fundamento lógico**

**Paulo Sérvulo dos Santos**

### **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

ORIENTAÇÃO:

Ronan Silva Ferreira

COORIENTAÇÃO:

Tatiana Alves Costa

**Dezembro, 2018  
João Monlevade–MG**

**Paulo Sérvulo dos Santos**

## **Q-bit: um novo fundamento lógico**

Orientador: Ronan Silva Ferreira

Coorientadora: Tatiana Alves Costa

Monografia apresentada ao curso de Engenharia de Computação do Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas, da Universidade Federal de Ouro Preto, como requisito parcial para aprovação na disciplina “Trabalho de Conclusão de Curso II”.

**Universidade Federal de Ouro Preto**

**João Monlevade**

**Dezembro de 2018**

S237q

Santos, Paulo Sérvulo.

Q-bit [manuscrito]: um novo fundamento lógico / Paulo Sérvulo Santos. - 2018.

88f.: il.: color; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Ronan Silva Ferreira.

Coorientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Tatiana Alves Costa.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Departamento de Computação e Sistemas de Informação.

1. Teoria quântica. 2. Computação quântica. I. Ferreira, Ronan Silva. II. Costa, Tatiana Alves. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 530.145:519.67

Catálogo: [ficha.sisbin@ufop.edu.br](mailto:ficha.sisbin@ufop.edu.br)

**Curso de Engenharia de Computação**

**FOLHA DE APROVAÇÃO DA BANCA EXAMINADORA**

**Q-bit: um novo fundamento lógico**

**Paulo Sérvulo dos Santos**

**Monografia apresentada ao Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial da disciplina CSI496 – Trabalho de Conclusão de Curso II do curso de Bacharelado em Engenharia de Computação e aprovada pela Banca Examinadora abaixo assinada:**



Prof. Dr. Ronan Silva Ferreira  
DECEA - UFOP  
Professor Orientador



Prof.ª Dr.ª Tatiana Alves Costa  
DECSI - UFOP  
Professor Coorientador



Prof. Dr. Darlan Nunes de Brito  
DECSI - UFOP  
Professor Convidado



Prof. Dr. Davidson Rezende Viana  
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas – Faculdade de Viçosa  
Professor Convidado

João Monlevade, 19 de Dezembro de 2018

*A Deus e a todas as pessoas que de alguma forma me auxiliaram nessa caminhada.*

# Agradecimentos

Certamente estes parágrafos não irão atender a todas as pessoas que fizeram parte dessa importante fase da minha vida. Portanto, desde já, peço desculpas àquelas que não estão presentes entre essas palavras, mas, elas podem estar certas que fazem parte do meu pensamento e de minha gratidão.

Agradeço primeiramente a Deus por ter me concedido o dom da vida e a oportunidade de realizar este grande sonho.

Reverencio o Professor Dr. Ronan Silva Ferreira e a Professora Dra. Tatiana Alves Costa pela dedicação e pela orientação deste trabalho e, por meio deles, me reporto a toda comunidade da Universidade Federal de Ouro Preto.

Gostaria de deixar registrado também, o meu agradecimento aos meus pais, Jesus e Rosária, meus irmãos José Cláudio, Jussara e Luís, e aos meus amigos, em especial Glaucus e Olímpio por terem me apoiado e incentivado durante essa caminhada. E por fim, agradeço a minha namorada, Iaponyra, por todo amor, carinho e compreensão.

*“Foi o tempo que dedicaste à tua rosa que a fez tão importante...”*

— Antoine De Saint-Exupéry (1900 – 1944),  
*in: O Pequeno Príncipe.*

# Resumo

Este trabalho apresenta uma breve revisão dos principais conceitos da Mecânica Quântica com implicações para a Computação Quântica. A partir dos notórios resultados, teóricos e experimentais, encontrados nessas áreas e do interesse de grandes empresas de tecnologia como Google, IBM e Intel, faz-se necessário a disseminação dessas linhas de conhecimento em nosso meio acadêmico. Para se ter ideia, hoje, algumas empresas já possuem projetos de processadores quânticos capazes de superar muitos dos supercomputadores atuais. A expectativa é que a implantação dessa nova tecnologia traga diversas implicações em áreas como segurança digital, criptografia e comunicação. O objetivo deste texto é oferecer de forma didática uma introdução à computação e informação quântica a fim de despertar o interesse de alunos e professores de nossa instituição por essa área moderna e promissora.

**Palavras-chaves:** Mecânica Quântica. Computação Quântica. Q-bit. Portas quânticas. Algoritmos quânticos.



# Abstract

This work presents a brief review of the main concepts of Quantum Mechanics with implications for Quantum Computation. From the notorious theoretical and experimental results found in these areas and in the interest of large technology companies such as Google, IBM and Intel, it is necessary to disseminate these lines of knowledge in our academic environment. To have an idea, some companies already have quantum processor designs that can outperform many of today's supercomputers. The expectation is that the implementation of this new technology will have several implications in areas such as digital security, encryption and communication. The purpose of this text is to offer a didactic introduction to quantum computing and information in order to arouse the interest of students and teachers of our institution through this modern and promising area.

**Key-words:** Quantum Mechanics. Quantum Computation. Q-bit. Quantum ports. Quantum algorithms.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Catástrofe ultravioleta . . . . .	16
Figura 2 – Esfera de Bloch com representação de um q-bit genérico . . . . .	35
Figura 3 – Portas lógicas clássicas . . . . .	37
Figura 4 – Portas de Pauli . . . . .	37
Figura 5 – Porta NOT . . . . .	39
Figura 6 – Porta CNOT Quântica . . . . .	44
Figura 7 – Porta Toffoli Quântica . . . . .	45
Figura 8 – Circuito Quântico Swap . . . . .	45
Figura 9 – Execução do circuito quântico swap para as entradas $ 1\rangle$ e $ 0\rangle$ . . . . .	46
Figura 10 – Circuito Somador Completo . . . . .	47
Figura 11 – Somador Completo Quântico . . . . .	47
Figura 12 – Exemplo de operação no circuito somador completo quântico . . . . .	48
Figura 13 – Circuito quântico para o Algoritmo de Procura Simples . . . . .	50
Figura 14 – Circuito quântico que implementa o Algoritmo de Deutsch . . . . .	53
Figura 15 – Circuito quântico para gerar os estados de Bell . . . . .	57
Figura 16 – Chip quântico da IBM . . . . .	63
Figura 17 – Localização dos q-bits no chip . . . . .	64
Figura 18 – Interface de edição do IBM Q-experience . . . . .	64
Figura 19 – Porta X no IBM Q-experience . . . . .	65
Figura 20 – Resultado da simulação da porta X no IBM Q-experience . . . . .	66
Figura 21 – Resultado da execução da porta X no IBM Q-experience . . . . .	67
Figura 22 – Porta H no IBM Q-experience . . . . .	68
Figura 23 – Resultado da simulação da porta H no IBM Q-experience . . . . .	69
Figura 24 – Resultado da execução da porta H no IBM Q-experience . . . . .	70
Figura 25 – Primeira parte do circuito de codificação suspensa . . . . .	71
Figura 26 – Resultado da simulação da primeira parte do circuito de codificação suspensa . . . . .	72
Figura 27 – Segunda parte do circuito de codificação suspensa . . . . .	73
Figura 28 – Resultado da simulação da segunda parte do circuito de codificação suspensa . . . . .	74
Figura 29 – Circuito de Codificação Suspensa . . . . .	75
Figura 30 – Resultado da simulação do circuito de Codificação Suspensa . . . . .	76
Figura 31 – Representação de um número complexo genérico na sua forma polar . . . . .	82
Figura 32 – Rotação no plano complexo . . . . .	84

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Comparativo entre o algoritmo de Shor e o algoritmo clássico para fatoração de números primos. . . . .	14
Tabela 2 – Tabela de pontos sobre a Esfera de Bloch. . . . .	35
Tabela 3 – Entradas e saídas para o Circuito <i>Swap</i> . . . . .	46
Tabela 4 – Tabela verdade do Circuito Somador Completo de 1 bit. . . . .	47
Tabela 5 – Funções do tipo $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ . . . . .	53
Tabela 6 – $Q$ -bits lidos por Alice e operação realizada por Bob. . . . .	61

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>MECÂNICA QUÂNTICA</b>	<b>15</b>
2.1	Unificando onda e matéria	15
2.2	A equação de Schrödinger	20
2.3	Espaço vetorial na Mecânica Quântica	24
2.3.1	Axiomas	24
2.3.2	O conjugado de um vetor complexo	25
2.3.3	Produto interno	25
2.3.4	Vetores de base do espaço	26
2.4	O estado quântico: observáveis, operadores e seu caráter probabilístico	27
2.5	Mais sobre operadores...	30
2.6	As Matrizes de Pauli	32
<b>3</b>	<b>BITS E Q-BITS</b>	<b>34</b>
<b>4</b>	<b>PORTAS QUÂNTICAS</b>	<b>37</b>
4.1	Portas quânticas de um q-bit	38
4.1.1	A Porta de Pauli $I$	38
4.1.2	A Porta de Pauli $X$	39
4.1.3	A Porta de Pauli $Y$	40
4.1.4	A Porta de Pauli $Z$	40
4.1.5	A Porta Hadamard ou Hadamard-Walsh	41
4.1.6	A Porta $S$ de Fase	42
4.2	Portas quânticas de múltiplos q-bits	43
4.2.1	Porta CNOT Quântica	43
4.2.2	Porta Toffoli Quântica	44
4.3	Circuitos quânticos: exemplos	45
4.3.1	Circuito Quântico Swap	45
4.3.2	Circuito Quântico Somador Completo de 1 q-bit	46
<b>5</b>	<b>ALGORITMOS QUÂNTICOS</b>	<b>49</b>
5.1	Algoritmo de Procura Simples	49
5.2	O Algoritmo de Deutsch	52
5.2.1	O problema de Deutsch	52

5.2.2	O Algoritmo de Deutsch . . . . .	53
<b>6</b>	<b>EMARANHAMENTO QUÂNTICO . . . . .</b>	<b>55</b>
6.1	Exemplos de estados emaranhados: estados de Bell . . . . .	57
6.2	Codificação suspensa . . . . .	59
6.3	Teleporte quântico . . . . .	60
<b>7</b>	<b>IBM QUANTUM EXPERIENCE . . . . .</b>	<b>63</b>
7.1	Exemplo: Porta de Hadamard . . . . .	68
7.2	Exemplo: codificação suspensa . . . . .	71
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>78</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>79</b>
	<b>APÊNDICE A – NÚMEROS COMPLEXOS . . . . .</b>	<b>82</b>

# 1 Introdução

Por séculos o homem vem trabalhando em tecnologias para facilitar sua vida na hora de realizar cálculos ou mesmo em tarefas do dia-a-dia. Sem dúvida o computador é uma das tecnologias mais revolucionárias da história da humanidade e até hoje desempenha um papel fundamental em seu desenvolvimento. O primeiro aparato computacional que representa um computador como conhecemos hoje foi proposto pelo matemático Alan Turing (1912-1954). Este mecanismo, conhecido como a *Máquina de Turing*, operava usando sequências de *bits*: classicamente, a menor unidade de informação a ser armazenada ou transmitida. Todos os computadores clássicos feitos até hoje utilizam esse conceito para o processamento da informação (MELO; CHRISTOFOLETTI, 2003). Por ter sido considerado um marco na história da computação com a criação desse aparato, Alan Turing é considerado o pai da ciência da computação.

Até hoje os computadores estão se modernizando, ficando cada vez mais velozes, eficientes e menores. Tendo em vista essa evolução e prevendo necessidades futuras, surge a ideia de utilizar dos processos quânticos para o processamento de informação. A Computação Quântica é um domínio de pesquisa recente que utiliza elementos de três áreas bem conhecidas: Matemática, Física e Computação. As vantagens teóricas advindas da utilização de fenômenos quânticos para a representação e o processamento de informação têm atraído atenção crescente não só da área científica, mas também da área tecnológica/industrial (JÚNIOR; LIMA, 2009).

Sendo uma das áreas formadoras da Computação Quântica, a Mecânica Quântica é considerada uma das teorias científicas mais bem sucedidas da história. A Teoria Quântica trata basicamente de partículas com dimensões atômicas ou moleculares, para as quais as leis da Mecânica Newtoniana não conseguem descrever seu movimento. É nesse sentido que surge a Computação Quântica, onde ao invés de trabalhar com a Física Clássica, os conceitos da Mecânica Quântica são utilizados para realizar o processamento da informação ao nível atômico. Um ponto importante que também nos remete à utilização dos conceitos da teoria quântica ao invés da clássica é a chamada *Lei de Moore*. Essa lei na verdade é uma projeção feita por Gordon Moore (1929), fundador da Intel. Na década de 1960, Moore observou que a cada um ano e meio o número de átomos usados para representar um bit era reduzido à metade. Isso equivale a dizer que a cada 18 meses o número de transistores integrados em um processador dobrava. Entretanto, a Lei de Moore impõe um limite físico aos computadores: uma vez atingida a escala atômica, as leis da Física Clássica não terão mais efeitos sobre os computadores (RODRIGUES, 2011). Este limite só pode ser transponível com a utilização da teoria quântica para tratar os “novos” bits.

A primeira descrição de um aparato computacional em termos da Mecânica Quântica foi realizada, em 1981, por Paul Benioff (1930). Benioff foi o primeiro que demonstrou a possibilidade da criação de uma espécie de “Máquina de Turing Quântica”. Já a ideia de que a utilização da Teoria Quântica poderia oferecer algo totalmente novo e com muitas vantagens para a computação foi apontada pela primeira vez por Richard Feynman (1918-1988), em 1982. Feynman mostrou que nenhuma Máquina de Turing Clássica poderia simular certos fenômenos quânticos sem introduzir um fator exponencial em seu desempenho. Em outras palavras, para simular fenômenos quânticos precisamos de uma máquina quântica. Feynman propôs que apenas um “simulador quântico universal” seria capaz de realizar essas simulações eficientemente. Mesmo apresentando a ideia, Feynman não mostrou como esse simulador poderia ser construído, fazendo com que sua ideia não tivesse um impacto imediato (JÚNIOR; LIMA, 2009; MELO; CHRISTOFOLETTI, 2003).

Entretanto, em 1985, David Deutsch (1953) demonstrou que um computador que utiliza dos fenômenos quânticos para processar a informação pode ser muito mais eficiente que um computador clássico, descrevendo um computador quântico universal. Além de desenvolver a Máquina de Turing Quântica, Deutsch foi o primeiro a desenvolver um algoritmo quântico utilizando somente operações quânticas. Este algoritmo era capaz de resolver um problema matemático que consistia em saber se uma função é balanceada ou constante. O algoritmo descrito por Deutsch era capaz de resolver tal problema de uma forma muito mais eficiente do que um algoritmo clássico. No entanto, seu algoritmo passou despercebido até 1989, quando Deutsch introduziu o modelo de circuitos quânticos (JÚNIOR; LIMA, 2009; MELO; CHRISTOFOLETTI, 2003). Com a introdução desse modelo de circuitos quânticos, o algoritmo de Deutsch foi reescrito nessa nova linguagem, dando então uma maior repercussão a seu trabalho. Essa maior visibilidade se deve ao fato da linguagem dos  $q$ -bits (versão quântica do  $bit$ ) ser muito semelhante à linguagem de circuitos lógicos e digitais, já bastante conhecida. Daí em diante, outros algoritmos quânticos foram desenvolvidos e difundidos utilizando-se a linguagem matemática associada à linguagem de circuitos quânticos (JÚNIOR; LIMA, 2009).

Mesmo após toda essa revolução, a computação quântica ainda era considerada apenas uma curiosidade. Essa perspectiva mudou radicalmente em 1994, quando o matemático Peter Shor (1959) apresentou o seu algoritmo quântico para fatoração de números grandes. Seu algoritmo representa um marco para a computação quântica (MELO; CHRISTOFOLETTI, 2003). Os resultados de seu desenvolvimento levaram a um crescente interesse em pesquisas na área e também, de certa forma, uma grande preocupação, principalmente para a área de segurança digital e a decodificação de chaves criptográficas, que se baseiam na fatoração de números primos. Este algoritmo já foi implementado com sucesso na fatoração do número 15, encontrando os seus fatores 3 e 5. A [Tabela 1](#) mostra o comparativo de tempo de fatoração dado o tamanho da chave entre o algoritmo de Shor e um algoritmo clássico.

Tabela 1 – Comparativo entre o algoritmo de Shor e o algoritmo clássico para fatoração de números primos.

Nº de bits do inteiro $n$	Algoritmo de Shor	Algoritmo clássico
512	3.4 seg	$10^4$ anos
1024	4.5 seg	$10^{10}$ anos
2048	36 min	$10^{19}$ anos
4096	4.8 hs	$10^{31}$ anos

Fonte: [Minetto \(2005\)](#)

Para tornar essa grande melhora com relação à computação clássica, a computação quântica apresenta novos conceitos que utilizam os fenômenos da Física Quântica. O primeiro a ser destacado é o  $q$ -bit, que é o análogo quântico do  $bit$ . Para manipular esses novos conceitos lógicos, a computação quântica possui uma série de portas lógicas, como a porta NOT e a porta de Hadamard. Cada uma dessas portas possui uma função específica, mas quando juntas, elas formam um circuito que pode ser utilizado para realizar diversas tarefas dependendo da configuração do mesmo. Estes circuitos podem ser usados para implementar algoritmos, onde um algoritmo é responsável por resolver um problema usufruindo das vantagens advindas das propriedades quânticas dos  $q$ -bits.

Atualmente, várias empresas no ramo da tecnologia investem nesta área. A Google anunciou no início de 2018 que está desenvolvendo um processador quântico com capacidade de atingir 72  $q$ -bits nomeado de *Bristlecon*. Segundo a empresa, a sua intenção é alcançar o que se conhece por *supremacia quântica*. Essa supremacia será alcançada quando um computador quântico for capaz de superar os supercomputadores atuais. Para alcançar este objetivo, a previsão é de que a tecnologia quântica deve chegar aos 49  $q$ -bits com uma taxa de erro abaixo de 0,5%. Este chip quântico da Google será capaz de superar estes 0,5% de erro, alcançando assim a supremacia quântica ([YUGE, 2018](#); [KELLY, 2018](#)).

Outras empresas que também se destacaram nesse ramo foram a Intel e a IBM. A Intel, no início de 2018 anunciou seu chip quântico contendo 49  $q$ -bits. A IBM por sua vez possui um computador quântico de 5  $q$ -bits que pode ser usado por pesquisadores de todo mundo para realizar testes e experimentos. Além disso, ela possui um outro computador quântico de 20  $q$ -bits que foi lançado em 2017. E não para por aí, no início de 2018, a IBM divulgou também o seu chip quântico de 50  $q$ -bits que estava sendo utilizado para testes internos ([OLIVEIRA, 2018](#)).



## 2 Mecânica Quântica

Antes de iniciarmos os estudos sobre a Computação Quântica, é de grande importância o entendimento de alguns dos principais conceitos da Mecânica Quântica. Este capítulo é dedicado a explorar um pouco dessa área da Física.

### 2.1 Unificando onda e matéria

A Mecânica Quântica é fundamental tanto para a compreensão dos fenômenos naturais quanto para o desenvolvimento técnico-científico. Esta teoria é imprescindível para o entendimento de propriedades atômicas, ligações químicas, dinâmica de elétrons em cristais dentre outros fenômenos. Trata-se de um conhecimento importante para todos os ramos das ciências duras. Do ponto de vista histórico, sua notável contribuição é a unificação dos conceitos fundamentais da física de partículas e radiação.

A Teoria Quântica tem seu início com a compreensão de que a energia da radiação é descontínua. Este problema, solucionado por Max Planck, surge com a motivação tecnológica de descrever a relação entre a temperatura no interior de um alto-forno e as intensidades relativas das frequências de radiação em uma siderúrgica. Este estudo é conhecido hoje como *radiação de corpo negro*. Um corpo negro é um objeto que absorve toda radiação que nele incide. Imagine, por exemplo, uma caixa com um orifício. Toda radiação que incide sobre o buraco é captada e permanece dentro da caixa enquanto a radiação que incide sobre a caixa é refletida. Dessa forma, o corpo negro em si é o buraco, não a caixa propriamente dita.

No século XIX foi proposta uma lei conhecida por *lei de Stefan-Boltzmann* que descrevia a taxa de variação temporal de energia irradiada, chamada *radiância* ( $R_T$ ), em relação à temperatura de um objeto. Esta lei é descrita como

$$R_T = \sigma T^4, \quad (2.1)$$

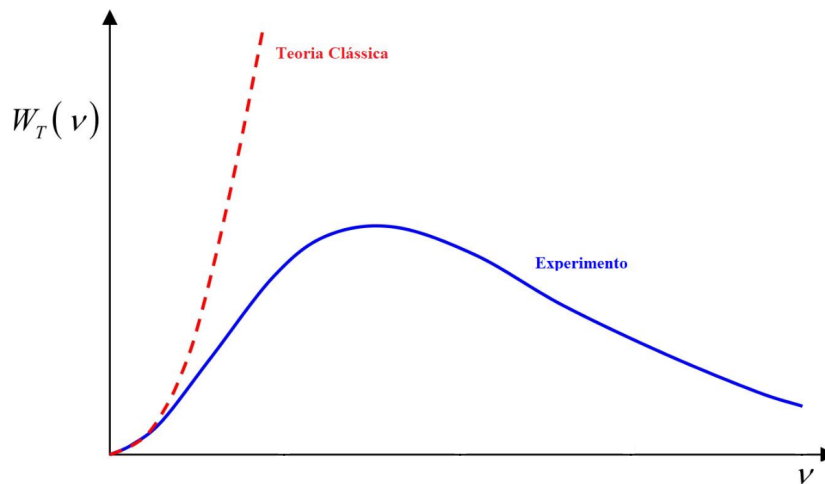
em que  $\sigma$  é chamada de constante de Stefan-Boltzmann e possui o valor de  $5,67 \times 10^{-8} \text{W/m}^2 \text{K}^4$ . Entretanto, essa lei não consegue descrever como a energia está distribuída em função da frequência da radiação emitida. Para resolver essa questão, Rayleigh e Jeans relacionaram a densidade de energia irradiada em uma dada frequência  $\nu$  quando o corpo negro se encontra a uma temperatura  $T$  (OLIVEIRA, 2010). Essa relação é descrita pela expressão

$$\rho_T(\nu) = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2, \quad (2.2)$$

em que  $k_B = 1,381 \times 10^{-23} \text{J/K}^{-1}$  é a *constante de Boltzmann*, enquanto  $c$  é a velocidade da luz.

Observando a expressão acima, podemos notar que a energia aumenta com o quadrado da frequência. Para se obter a energia total é necessário então fazer a integração sobre todo o espectro de frequências, de zero a infinito. Entretanto, procedendo assim, a relação de Rayleigh-Jeans prevê que a energia total irradiada será infinita, o que por sua vez não tem uma plausibilidade física. Esse desacordo quando comparado com os dados experimentais ganhou o nome de *catástrofe ultravioleta*. Vale dizer que não há nada de errado com os cálculos de Rayleigh-Jeans. O fato é que as premissas e convicções da Física Clássica já haviam atingido seu limite de atuação, fornecendo assim uma descrição incompatível com a observação experimental (OLIVEIRA, 2010), como mostra a [Figura 1](#). Em 1900, Max Planck apresentou sua tese para a Sociedade Alemã de Física com o seguinte

Figura 1 – Catástrofe ultravioleta



Fonte: o autor

título: *Sobre a teoria da distribuição de energia do espectro normal*. É neste trabalho que foi apresentada, pela primeira vez, a hipótese de que a absorção e emissão de energia não seria dada de forma contínua, como descreve a teoria eletromagnética clássica, mas sim em unidades discretas de uma quantidade mínima, no qual

$$E = n\delta E, \quad (2.3)$$

em que  $n$  é um número inteiro e a energia é proporcional à frequência da radiação. Com sua hipótese, Planck estabelece uma relação entre energia e frequência:

$$E = h\nu, \quad (2.4)$$

em que  $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ Js}$  é uma constante. Depois a constante  $h$ , bem como a relação (2.4) receberam seu nome. Observe que a frequência linear  $\nu$  se relaciona com a frequência angular por meio do termo  $2\pi$ . Sendo assim, a Relação de Planck pode ser reescrita na forma

$$E = \hbar\omega, \quad (2.5)$$

em que “h cortado” é definido em termos da constante de Planck, sendo  $\hbar = h/2\pi$ . Finalmente, Planck chegou à relação para a distribuição de energia do corpo negro usando sua hipótese:

$$\rho_T(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}. \quad (2.6)$$

Essa relação oferece a descrição correta para os resultados obtidos experimentalmente para a radiação de corpo negro. Fica como convite ao leitor verificar que a Lei de Stefan-Boltzmann é um caso particular dessa descrição de Planck.

Durante anos Planck tentou conciliar a sua hipótese do quanta de energia com a física clássica, mas sem sucesso... Isso fez Planck dar um passo em direção ao desconhecido, além da fronteira confortável da Física Clássica. Mas foi Albert Einstein quem realmente compreendeu as implicações do trabalho de Planck em profundidade. Einstein mostrou que o caráter descontínuo da energia está associado ao caráter corpuscular da radiação. Esta prova se dá a partir do *efeito fotoelétrico*. Este fenômeno é caracterizado pela ejeção de elétrons de uma superfície metálica pela injeção de uma luz de alta frequência (OLIVEIRA, 2010). Hoje em dia, o efeito fotoelétrico é amplamente utilizado pela indústria para a criação de células fotoelétricas.

Para entender melhor esse fenômeno de ejeção de elétrons, podemos considerá-los presos à superfície de um metal como se este estivessem dentro de um poço de potencial em que há um custo energético para saírem de lá. Para uma comparação, podemos imaginar o poço de potencial gravitacional gerado pela massa da terra ao qual estamos presos. Entretanto, na superfície do metal a atração não é tão forte, podendo uma luz incidente sobre um elétron fornecer energia suficiente para arranca-lo. Em geral, a energia é suficiente não apenas para arrancar o elétron do poço, mas também para fornecê-lo energia cinética. Dessa maneira, se soubermos a energia da luz incidente e a velocidade com que o elétron é ejetado, podemos obter a “profundidade” do poço.

Indo direto ao ponto, existem dois aspectos principais do efeito fotoelétrico que a Física Clássica não consegue explicar:

1. A energia cinética dos elétrons ejetados não depende da intensidade da luz incidente (proporcional ao quadrado do campo elétrico). Isto não está de acordo com a teoria clássica que descreve a força que atua sobre cada elétron como sendo igual ao produto da carga pelo campo elétrico,  $e\vec{E}$ . Sendo assim, a energia cinética deveria aumentar com o aumento do módulo de  $\vec{E}$ , mas isso não acontece;
2. Existe uma “frequência de corte” para a luz incidente, abaixo da qual o efeito deixa de ocorrer, independentemente da intensidade do campo elétrico. Isso também está em conflito com o eletromagnetismo clássico, para o qual o efeito deveria ocorrer qualquer que fosse a frequência da onda.

A explicação de Einstein para o efeito fotoelétrico traz o que Planck havia afirmado: a energia da onda que incide sobre o metal não se dá de forma contínua, mas de forma quantizada em unidades de  $h\nu$ . Einstein introduz aqui uma das ideias fundamentais da mecânica quântica, tratando essas quantas de luz como se fossem partículas em si. Mais tarde essas quantas, ou partículas, ganharam o nome de *fóton*. Dessa forma, Einstein postulou que a energia cinética de um elétron arrancado da placa de metal é igual à diferença entre sua energia e a profundidade do poço de potencial:

$$E_c = h\nu - W, \quad (2.7)$$

em que  $W$  é uma função do trabalho necessária para arrancar o elétron do metal, em oposição à força atrativa da carga positiva remanescente da rede cristalina. Portanto,  $W$  é uma característica particular de cada material ou substância usada como condutor.

Com efeito, Einstein explicou todos os resultados experimentais envolvendo o efeito fotoelétrico e podemos entender os dois problemas do efeito fotoelétrico que a teoria clássica não consegue explicar. Primeiro é necessário que o elétron seja ejetado com uma certa energia cinética para que este seja detectado. Voltando a expressão postulada por Einstein, temos que se a frequência de corte for tal que  $h\nu = W$ , a função de trabalho será zero. Daí, temos a frequência de corte. Observe que se o valor de  $h\nu$  for menor em relação ao valor de  $W$ , o efeito fotoelétrico deixa de ocorrer, pois o elétron continuará preso ao metal. Logo, o efeito não depende da quantidade de fótons que atingem o metal, mas sim do valor de  $h\nu$  em relação a função de trabalho do material. Além disso, o *fóton* também possui momento, ou seja, a própria radiação carrega momento, dado por

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2}v, \quad (2.8)$$

em que  $E$  é a *energia total relativística*.

Em seguida, em 1912, Niels Bohr usou as ideias de Planck e Einstein para propor uma descrição do átomo de hidrogênio: um elétron orbitando em torno de um próton e sujeito à força coulombiana. Observe que pela conservação do momento angular, a velocidade do elétron é constante

$$L = mvr = (\text{constante}), \quad (2.9)$$

em que  $r$  é o raio da órbita. Bohr levanta a hipótese de que o momento angular também seria quantizado como algo do tipo

$$mvr = n\hbar, \quad (2.10)$$

em que  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Levando esse resultado na condição de estabilidade do Hidrogênio, temos que

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}. \quad (2.11)$$

Isso por sua vez implica em

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{m}{r} \left( \frac{n\hbar}{mr} \right)^2 \implies r = 4\pi\epsilon_0 \frac{n^2\hbar^2}{me^2}, \quad (2.12)$$

levando a uma quantização das órbitas acessíveis ao elétron.

Observe que este fato implicará sobre a energia total do elétron

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r} \quad (2.13)$$

e

$$E_p = - \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} dr = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}. \quad (2.14)$$

Portanto,

$$E = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r}. \quad (2.15)$$

Usando o resultado obtido para o raio da órbita,

$$E = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2 \left( 4\pi\epsilon_0 \frac{n^2\hbar^2}{me^2} \right)} \quad (2.16)$$

$$= - \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2 n^2}, \quad (2.17)$$

o que implica na quantização da energia total. Desses resultados, podemos recapitular as hipóteses de Bohr:

- (i) Existe no átomo um conjunto discreto de estados estacionários. O estado com  $n = 1$  é chamado *estado fundamental*, no qual o átomo pode permanecer indefinidamente;
- (ii) Os átomos estacionários são aqueles que satisfazem à condição de quantização do momento angular;
- (iii) Na troca de estados, se  $E_{inicial} > E_{final}$ , ocorre a emissão de um fóton de frequência (evidentemente, o processo inverso ocorre a absorção)

$$\nu_{i \rightarrow f} = \frac{E_i - E_f}{h}. \quad (2.18)$$

Uma outra contribuição para a fundação da Teoria Quântica, de ondas e partículas, foi apresentada em 1924, pelo francês Louis de Broglie. Ele apresentou em sua tese de doutorado, sobre “*ondas de matéria*”, o seguinte argumento simétrico: se fótons são ondas e partículas ao mesmo tempo, então partículas também devem ter o caráter ondulatório. Esta suposta onda de matéria teria uma frequência  $\nu$  e sua energia dada por  $E = h\nu$ . O momento associado a essa partícula seria  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ , em que  $\lambda$  é o comprimento de onda

associado à partícula chamado de *comprimento de onda de de Broglie*. O comprimento de onda  $\lambda$  pode ser escrito como

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \implies \lambda = \frac{h}{p}. \quad (2.19)$$

Essa equação é conhecida como *Relação de de Broglie*.

As hipóteses de de Broglie foram verificadas experimentalmente por vários cientistas. Particularmente, em 1927, George Paget Thompson mostrou que os elétrons sofrem difração, tal como ondas eletromagnéticas. Thompson mediu o comprimento de onda de de Broglie em função do padrão de difração em um experimento de fendas, verificando que o comprimento de onda obtido estava em acordo com a relação  $\lambda = h/p$ .

## 2.2 A equação de Schrödinger

Até aqui, vimos que as relações matemáticas para a energia em pacotes e entre o momento linear e o comprimento de onda podem ser escritas na forma:

$$E = h\nu = 2\pi\hbar\frac{\omega}{2\pi} = \hbar\omega \quad (2.20)$$

e

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\frac{2\pi}{k}} = \hbar k, \quad (2.21)$$

respectivamente. Observe que essas relações de energia e momento estão escritas em termos da constante universal

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}. \quad (2.22)$$

Uma onda é descrita pela equação de onda, que nada mais é que uma equação diferencial na forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x, t) = \xi \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x, t). \quad (2.23)$$

Para uma função do tipo  $\Psi(x, t)$ , temos as possíveis formas de solução para a equação de onda:

(a)  $\text{sen}(kx - \omega t)$ ;

(b)  $\text{cos}(kx - \omega t)$ ;

(c)  $e^{i(kx - \omega t)}$ ;

(d)  $e^{-i(kx - \omega t)}$ ,

ou uma combinação linear dessas soluções. Do ponto de vista físico é desejável que a solução da equação atenda duas propriedades. São elas:

1. Superposição de ondas: fenômeno que acarreta nos padrões de interferência e construção de pacotes de ondas.
2. Os coeficientes da equação devem envolver apenas constantes fundamentais da natureza, como carga, massa e constante de Planck. Sendo assim, deve-se evitar parâmetros como momento e energia, os quais dizem respeito a um tipo de movimento em particular.

Levando as soluções (a), (b), (c) e (d) na [Equação 2.23](#), chegamos à conclusão que

$$\xi^{-1} = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{E^2}{p^2} = \frac{p^2}{4m^2}, \quad (2.24)$$

em que usamos a [Equação 2.20](#) e [Equação 2.21](#). Portanto, o coeficiente da equação de onda ([2.23](#)) não atende a segunda propriedade. Por outro lado, uma pista sobre a forma da equação que atenda nossos requisitos pode ser obtida observando que:

$$(i) \quad \frac{\partial}{\partial t}[\text{sen}(kx - \omega t)] \propto |\omega| \times f_a(xt);$$

$$(ii) \quad \frac{\partial}{\partial t}[\text{cos}(kx - \omega t)] \propto |\omega| \times f_b(xt);$$

$$(iii) \quad \frac{\partial}{\partial t}[e^{i(kx - \omega t)}] \propto |\omega| \times f_c(xt);$$

$$(iv) \quad \frac{\partial}{\partial t}[e^{-i(kx - \omega t)}] \propto |\omega| \times f_d(xt).$$

Dessa forma, a primeira derivada com respeito ao tempo traz o efeito genérico da multiplicação por  $\omega$ . Mas como

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{p^2}{2m\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m}, \quad (2.25)$$

poderíamos pensar em uma equação da forma

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) = \xi \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t). \quad (2.26)$$

Daí, segue que as funções (a) e (b) não são mais solução para a [Equação 2.26](#). E ainda, as funções (c) e (d) só são solução da [Equação 2.26](#) com uma escolha adequada para o coeficiente dessa equação. Particularmente, tomando

$$\xi^{-1} = \frac{i\omega}{k^2} = \frac{i\hbar E}{p^2} = \frac{i\hbar}{2m} \quad (2.27)$$

temos a escolha adequada para o coeficiente da [Equação 2.26](#) de acordo com nossas exigências físicas. O preço que se paga pelas exigências das propriedades físicas é que apenas a função  $(c)$  é de fato solução. Segue então que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x, t) = \frac{2m}{i\hbar} \frac{\partial}{\partial t}\Psi(x, t), \quad (2.28)$$

que multiplicando pela unidade  $i\hbar/i\hbar$ , toma a forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(x, t), \quad (2.29)$$

que é conhecida como *Equação de Schrödinger*. Note que do jeito como está apresentada temos a interpretação de uma partícula livre. Para completarmos essa equação para o caso de uma partícula num campo de forças, basta notar que, de forma geral

$$V = V(\vec{r}, t) \text{ e não } V = (p \text{ ou } E). \quad (2.30)$$

Daí,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t). \quad (2.31)$$

Observe então que a função de onda  $\Psi(\vec{r}, t)$  assume o papel do descritor do comportamento de uma partícula de massa  $m$  em um campo de forças  $\vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}, t)$ , tal como  $\vec{r}(t)$  é o descritor na mecânica clássica. Ainda dessa discussão, é possível ver que para  $\Psi(\vec{r}, t)$  fornecer uma interpretação física, precisamos tomar sua parte real:

$$\Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2. \quad (2.32)$$

Mas note que a [Equação 2.32](#) é proporcional à energia  $e$ , portanto, proporcional também à intensidade da onda de matéria. Pela relação entre a intensidade  $I$  de uma onda e sua energia, na mecânica quântica a intensidade corresponde ao número de quanta de energia detectados em uma região do espaço compreendendo um volume. Isso porque

$$[I] = \frac{\text{Watts}}{\text{metro}^2} = \frac{\text{Joule}}{\text{segundo} \cdot \text{metro}^2} \quad (2.33)$$

e, portanto, a energia por unidade de tempo pode ser escrita como

$$dE = I dx dy, \quad (2.34)$$

ou, do ponto de vista da Mecânica Quântica, o que temos são quantas de energia por unidade de área! Evidentemente, o número  $N_A$  de quantas de energia em  $dx \cdot dy$  é  $N_A/h\nu$ , sendo  $N$  o número total em  $dx \cdot dy \cdot dz$ . Dessa forma, podemos definir uma frequência relativa  $N_A/N$ , que no limite de  $N \rightarrow \infty$ , nos dará a probabilidade  $P(x)$  de encontrar um quanta em  $dx$ . Com isso, temos que

$$P(x) \propto I(x) dx \propto \Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \quad (2.35)$$



e  $\Psi(\vec{r}, t)$  interpretada como uma densidade de probabilidade para a posição de uma partícula. Isso então implica que a função de onda precisa ser normalizada

$$\int_{\text{Volume}} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dx dy dz = 1. \quad (2.36)$$

Evidentemente, com essa interpretação estatística (devido a Max Born, 1926), precisaremos calcular valores *esperados* ou *médios*. Por exemplo,

$$\langle \vec{r} \rangle = \int_V \vec{r} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV = \int_V \Psi^*(\vec{r}, t) \vec{r} \Psi(\vec{r}, t) dV. \quad (2.37)$$

Para vermos o que acontece com a energia e o momento, primeiro vamos dar uma olhada na evoluções temporal e espacial da função de onda. Tomando um caso geral, podemos escrever que

$$\Psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar}, \quad (2.38)$$

em que usamos o conjunto de Equações (2.20) e (2.21). Observe que esse caso mais geral corresponde à descrição de *ondas planas*. Note, entretanto, que a frequência  $\omega$  da onda está relacionada à energia  $E$  pelo fator  $\hbar\omega$ , levando a  $\Psi(\vec{r}, t)$  depender do tempo por meio do fator exponencial

$$\exp\left[-\frac{iEt}{\hbar}\right]. \quad (2.39)$$

Com isso, vejamos o que acontece tomando a evolução temporal da função de onda  $\Psi(\vec{r}, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} [A e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar}] \\ &= A \frac{i}{\hbar} (-E) e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

que ajustando os termos resulta

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) &= E \Psi(\vec{r}, t) \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) &= E \Psi(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\implies E \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.42)$$

Em um raciocínio análogo, a dependência espacial da onda de matéria corresponde ao momento da partícula de massa  $m$  dada pelo termo exponencial

$$\exp\left[-\frac{i(\vec{p}\cdot\vec{r})}{\hbar}\right]. \quad (2.43)$$

Daí, a evolução espacial pode ser estudada tomando a derivação espacial da função de onda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \Psi(\vec{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial \vec{r}} [A e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar}] \\ &= \frac{i}{\hbar} p_x \Psi(\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (2.44)$$

em que reduzimos para apenas uma dimensão sem perda de generalidade. Portanto,

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Psi(\vec{r}, t) = p_x \Psi(\vec{r}, t) \quad (2.45)$$

$$\implies \vec{p} \longrightarrow -i\hbar \vec{\nabla}. \quad (2.46)$$

Podemos então escrever a energia total no formalismo quântico como dada pela [Equação 2.31](#). Então, podemos dizer que, a exemplo da [Equação 2.37](#),

$$\langle E \rangle = \int_V \Psi^*(\vec{r}, t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) dV \quad (2.47)$$

e

$$\langle \vec{p} \rangle = \int_V \Psi^*(\vec{r}, t) (-i\hbar) \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}, t) dV. \quad (2.48)$$

Uma pergunta imediata é se o movimento quântico e o movimento clássico concordam, mas este questionamento fica com exercício para o leitor.

## 2.3 Espaço vetorial na Mecânica Quântica

Em 1939, Paul Dirac (1902-1984) propôs uma notação vetorial poderosa para a mecânica quântica. Esta notação é amplamente usada na teoria quântica, pois facilita as operações com vetores no espaço vetorial complexo. Os elementos (vetores) que compõem o espaço vetorial na mecânica quântica são chamados de *kets*. Um *ket-A* é denotado por  $|A\rangle$ .

### 2.3.1 Axiomas

Os axiomas usados para definir um espaço vetorial de estados quânticos são os seguintes:

1. A soma de dois *kets* quaisquer retorna um novo *ket*:

$$|A\rangle + |B\rangle = |C\rangle. \quad (2.49)$$

2. A adição de *ket* é comutativa e associativa:

- $|A\rangle + |B\rangle = |B\rangle + |A\rangle$ ;
- $(|A\rangle + |B\rangle) + |C\rangle = |A\rangle + (|B\rangle + |C\rangle)$ .

3. Somar uma matriz nula<sup>1</sup> a um *ket* retorna o próprio *ket*:  $|A\rangle + \mathbf{0} = |A\rangle$ .

4.  $|A\rangle + (-|A\rangle) = \mathbf{0}$ .

<sup>1</sup> O zero em negrito representa uma matriz nula, ou seja, uma matriz de zeros.

5. A multiplicação de um número complexo  $z$  por um *ket* (vale para um escalar também) resulta em um novo *ket*:  $|zA\rangle = z|A\rangle = |B\rangle$ .

6. Propriedade distributiva:

- $z(|A\rangle + |B\rangle) = z|A\rangle + z|B\rangle$ ;
- $(z + w)|A\rangle = z|A\rangle + w|A\rangle$ .

Os axiomas acima valem também se identificarmos um *ket* a um vetor coluna do tipo

$$|A\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

em que temos um espaço 2-dimensional e  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são componentes complexas do *ket*  $|A\rangle$ . Por exemplo, a soma apresentada no axioma (2.49) pode ser escrita na forma:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

### 2.3.2 O conjugado de um vetor complexo

Da mesma forma que um número complexo  $z$  possui seu conjugado complexo  $z^*$ , um *ket*  $|A\rangle$  possui também seu conjugado complexo e transposto chamado *bra* e denotado por  $\langle A|$ . Naturalmente, os *bras* satisfazem os axiomas descritos anteriormente, mas precisamos destacar dois pontos:

1. O *bra* correspondente de  $(|A\rangle + |B\rangle)$  é  $(\langle A| + \langle B|)$
2. Se  $z$  é complexo, o *bra* correspondente ao *ket*  $z|A\rangle$  não é  $\langle A|z$ , e sim  $\langle A|z^*$ .

Além disso, é importante destacar que o *bra* correspondente ao *ket*

$$|A\rangle = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

é descrito por um vetor coluna

$$\langle A| = (d_1^* \quad d_2^* \quad d_3^*). \quad (2.53)$$

### 2.3.3 Produto interno

Chamamos de produto interno a multiplicação entre *bras* e *kets* a operação análoga ao produto escalar entre dois vetores no plano real. Essa operação é denotada por:

$$\langle B|A\rangle = (\text{número complexo}). \quad (2.54)$$

Os axiomas do produto interno são:

1.  $\langle C | (|A\rangle + |B\rangle) = \langle C | A\rangle + \langle C | B\rangle$ ;
2.  $\langle B | A\rangle = \langle A | B\rangle^*$ .

Observe também que:

$$\begin{aligned} \langle B | A\rangle &= (\beta_1^* \quad \beta_2^* \quad \beta_3^*) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\ &= \beta_1^* \alpha_1 + \beta_2^* \alpha_2 + \beta_3^* \alpha_3. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Temos ainda algumas consequências do produto interno

- a) Um vetor está normalizado se

$$\langle A | A\rangle = 1. \quad (2.56)$$

- b) Dois vetores são ditos ortogonais se

$$\langle B | A\rangle = 0. \quad (2.57)$$

### 2.3.4 Vetores de base do espaço

Da mesma forma que usamos normalização e a ortogonalidade para encontrarmos vetores de base no espaço real 3-dimensional, como  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ , teremos esses conceitos na mecânica quântica. Mas antes, vamos generalizar essa notação para o caso de um espaço infinito,  $N$ -dimensional. Suponha um 3-vetor (vetor no espaço 3-D) escrito em termos dos vetores de base desse espaço:  $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ . Podemos reduzir essa notação relacionando as 3 dimensões desse espaço aos índices 1, 2 e 3 dos versores  $\hat{e}_1$ ,  $\hat{e}_2$  e  $\hat{e}_3$ . Com efeito, o vetor  $\vec{a}$  pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \\ &= \sum_{i=1}^{N=3} a_i \hat{e}_i \end{aligned} \quad (2.58)$$

em que a base desse espaço é  $\sum_{i=1}^{N=3} \hat{e}_i$ . Observe que (2.58) é uma notação mais enxuta e facilmente expandida para um espaço  $N$ -dimensional qualquer.

Evidentemente, o número de linhas de um *ket* ou *bra* indica a dimensão do espaço vetorial complexo. Então, considerando um espaço  $N$ -dimensional de base  $\sum_i^N |i\rangle$ , um vetor escrito nesta base é dado por

$$|A\rangle = \sum_i^N \alpha_i |i\rangle. \quad (2.59)$$

Então, para obtermos os componentes  $\alpha_i$ , basta calcularmos o produto interno com uma base  $\langle j|$  de forma que:

$$\langle j | i\rangle = 0 \quad (\text{ortonormais}) \quad (2.60)$$

e

$$\langle j|j\rangle = 1 \quad (\text{normalizados}). \quad (2.61)$$

Segue então que  $\langle j|i\rangle = \delta_{ij}$  e leva ao colapso da [Equação 2.59](#), restando apenas a componente na direção  $|j\rangle$ :

$$\langle j|A\rangle = \sum_i^N \alpha_i \langle j|i\rangle = \alpha_j. \quad (2.62)$$

Isso significa que as componentes de um vetor são os produtos internos desse vetor com vetores de base. Então a [Equação 2.59](#) pode ser reescrita como:

$$|A\rangle = \sum_i^N |i\rangle \langle i|A\rangle, \quad (2.63)$$

em que trocamos  $\alpha_i = \langle i|A\rangle$  de posição com  $|i\rangle$  por se tratar apenas de um número (complexo). Com essa notação o cálculo do produto interno de um *ket* qualquer com o *ket-A* é direto: basta aplicar o *bra* correspondente em ambos os lados da equação acima.

## 2.4 O estado quântico: observáveis, operadores e seu caráter probabilístico

O estado de um sistema quântico é descrito, em linguagem matemática, por um vetor em um espaço vetorial. Mas também é possível acessar experimentalmente uma grandeza física. Quando isso ocorre, chamamos essa grandeza física de um *observável*. São exemplos de grandezas observáveis a posição de uma partícula, sua energia, momento, dentre outras.

Esses observáveis são descritos, ou “acessados” matematicamente, por operadores (ou transformações) lineares. Vamos por enquanto deixar alguns detalhes sobre operadores de fora e começar por apenas escrever algumas propriedades para o operador  $\hat{O}$  (usaremos o circunflexo para indicar que se trata de um operador).

$$\hat{O}|A\rangle = |B\rangle; \quad (2.64)$$

$$\hat{O}z|A\rangle = z|B\rangle; \quad (2.65)$$

$$\hat{O}(|A\rangle + |B\rangle) = \hat{O}|A\rangle + \hat{O}|B\rangle. \quad (2.66)$$

Usando (2.64) e escrevendo o *ket-A* em termos dos vetores de base, isto é,

$$|A\rangle = \sum_i \alpha_i |i\rangle, \quad (2.67)$$

resulta que

$$\sum_i \hat{O}|i\rangle \alpha_i = \sum_i \beta_i |i\rangle. \quad (2.68)$$

Aqui há um ponto importante. Se tomarmos o produto interno entre uma base  $|j\rangle$  e a Equação 2.68, teremos a igualdade abaixo:

$$\sum_i \langle j | \hat{O} | i \rangle \alpha_i = \sum_i \beta_i \langle j | i \rangle. \quad (2.69)$$

Novamente, de (2.64) vemos que o termo  $\langle j | \hat{O} | i \rangle$  é um número complexo. Na verdade é um conjunto de  $N \times N$  números complexos, dependendo da dimensão  $N$  do espaço vetorial. Logo, podemos abreviar  $\langle j | \hat{O} | i \rangle$  por, por exemplo,  $\theta_{ji}$ , que nada mais são que as entradas da matriz  $\hat{O} : N \times N$ . Supondo  $N = 3$ , teríamos:

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Segue então que podemos escrever

$$\sum_i \theta_{ji} \alpha_i = \beta_j, \quad (2.71)$$

ou ainda

$$\begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

### Descrição para uma medição simples

Vejamos um exemplo da ação de operadores usando um sistema de dois *spins*. Cada *spin* pode ser observado em um de dois estados: para cima ( $\uparrow$ ) ou para baixo ( $\downarrow$ ). Esse é um típico caso de um sistema de dois níveis. Seja qual for, a informação do estado do primeiro *spin* estará em  $|a\rangle$  e do segundo em  $|b\rangle$ . Vamos então associar cada *spin* a um operador, por exemplo,  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$ . Como o estado de um sistema quântico é representado por um vetor, se medirmos ambos os *spins* o sistema termina em um estado representado por um autovetor simultâneo de  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$ . Usando a álgebra de *bra-kets*, podemos escrever esse fato da seguinte forma: para o primeiro *spin*

$$\hat{a} |a, b\rangle = a |a, b\rangle \quad (2.73)$$

e para o outro

$$\hat{b} |a, b\rangle = b |a, b\rangle, \quad (2.74)$$

em que  $a$  e  $b$  são os respectivos autovalores de  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$ .

### Descrição para uma medição simultânea

Ainda usando o caso acima, para acessarmos simultaneamente o estado dos dois spins temos que atuar com o operador  $\hat{a}\hat{b}$ ,

$$\hat{a}\hat{b}|a, b\rangle = \hat{a}b|a, b\rangle = ab|a, b\rangle, \quad (2.75)$$

que deve produzir o mesmo efeito do operador  $\hat{b}\hat{a}$ <sup>2</sup>. Para esse caso, como a ordem dos números  $ab$  ou  $ba$  pouco importa, o operador  $\hat{b}\hat{a}$  retorna o mesmo resultado do operador  $\hat{a}\hat{b}$ . Logo, se dois observáveis comutam,

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{b}|a, b\rangle &= \hat{b}\hat{a}|a, b\rangle \\ [\hat{a} - \hat{b}]|a, b\rangle &= 0, \\ \Rightarrow [\hat{a}, \hat{b}]|a, b\rangle &= 0, \end{aligned} \quad (2.76)$$

então existe uma base completa de autovalores dos dois operadores. Dito de outra forma, a condição para duas medidas simultâneas é que os observáveis comutem.

### O caráter probabilístico

Imagine agora que você tenha preparado um dos *spin* do caso acima ao longo do eixo  $z$ , sentido  $\hat{k}$  para cima ou  $-\hat{k}$  para baixo<sup>3</sup>. Logo, podemos usar as representações para cima  $|\uparrow\rangle$  e para baixo  $|\downarrow\rangle$ , formando o conjunto de vetores de base para o espaço 2-dimensional dos *spins*. Com efeito, um *spin* em um estado aleatório  $|S\rangle$ , preparado de qualquer forma, deverá ser descrito como a combinação linear dos vetores de base,

$$|S\rangle = S_{\uparrow}|\uparrow\rangle + S_{\downarrow}|\downarrow\rangle, \quad (2.77)$$

em que  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$  são mutuamente ortogonais, ou seja,  $\langle\uparrow|\downarrow\rangle = \langle\downarrow|\uparrow\rangle = 0$  e as componentes do *ket*- $S$  são  $S_{\uparrow} = \langle\uparrow|S\rangle$  e  $S_{\downarrow} = \langle\downarrow|S\rangle$ . Mas, considerando que na medição o *spin* deva apontar para algum dos sentidos, para cima ou para baixo, as componentes  $S_{\uparrow}$  e  $S_{\downarrow}$  possuem um caráter probabilístico. No entanto,  $\langle\uparrow|S\rangle$  e  $\langle\downarrow|S\rangle$  são números, em geral complexos, não oferecendo uma realidade experimental. Por outro lado, se atribuirmos a essas componentes um significado de amplitude de probabilidades,  $S_{\uparrow}^*S_{\uparrow}$  e  $S_{\downarrow}^*S_{\downarrow}$  passam a representar as probabilidades do *spin* ser medido para cima ou para baixo, respectivamente. As probabilidades em si, serão

$$Prob_{\uparrow} = \langle S|\uparrow\rangle \langle\uparrow|S\rangle \quad (2.78)$$

e

$$Prob_{\downarrow} = \langle S|\downarrow\rangle \langle\downarrow|S\rangle. \quad (2.79)$$

<sup>2</sup> Se  $A$  e  $B$  são matrizes, nem sempre  $AB$  e  $BA$  produzem o mesmo efeito!

<sup>3</sup> Evidentemente, poderíamos optar por  $\hat{i}$  e  $-\hat{i}$  (direita e esquerda) ou  $-\hat{j}$  e  $\hat{j}$  (para trás e para frente).

Evidentemente, esta interpretação estatística deverá obedecer a condição de normalização,

$$S_{\uparrow}^* S_{\uparrow} + S_{\downarrow}^* S_{\downarrow} = 1 \quad (2.80)$$

ou, equivalentemente,

$$\langle S|S \rangle = 1. \quad (2.81)$$

Pela expressão acima, podemos notar que o estado de um sistema quântico é representado por um *ket* normalizado.

## 2.5 Mais sobre operadores...

Na seção anterior, vimos algumas propriedades dos operadores. Em geral, um operador altera a direção e sentido do vetor sobre o qual ele atua. Mas há exceções. Para alguns operadores, em particular, haverá os *autovetores* para os quais a atuação do operador não afetará sua direção. A descrição dessa particularidade é escrita como

$$\hat{O} |x\rangle = \lambda |x\rangle. \quad (2.82)$$

Isso nos diz que  $|x\rangle$  é um *autovetor* ou *autoket* do operador  $\hat{O}$ , em que  $\lambda$  é um número, em geral complexo. Para darmos uma olhada nisso, vamos supor que  $\hat{O}$  é uma matriz do tipo  $2 \times 2$ , tal que

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

e que

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

Logo, levando na [Equação 2.82](#)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \times 1) + (4 \times 1) \\ (4 \times 1) + (1 \times 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

$$\implies 5 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5|x\rangle \quad (2.86)$$

e, portanto,  $|x\rangle$  é um *autoket* de  $\hat{O}$  e 5, o fator multiplicativo, é seu *autovalor*. Por outro lado, se  $|x\rangle$  fosse escrito como

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

teríamos como resultado um *ket* com direção e magnitude diferentes do *ket*  $|x\rangle$ .

Evidentemente, podemos também atuar com um operador em um *bra*. Entretanto, não podemos esquecer que o correspondente do *ket*  $z|x\rangle$  não é o *bra*  $\langle x|z$ , mas sim  $\langle x|z^*$ .



Portanto, é de se esperar que algo semelhante aconteça na correspondência do *ket*  $\hat{O}|x\rangle$ . Por ser uma matriz, um operador possui uma estrutura mais delicada, por assim dizer. Além de termos que tomar o complexo conjugado de seus elementos, temos que realizar mais uma manobra. Observe que os *kets* são representados por vetores coluna, enquanto que os *bras* por vetores linha. Então, para respeitarmos isso, precisamos rearranjar os elementos complexos conjugados do operador tomando sua transposta

$$[\hat{O}^*]^T \equiv \hat{O}^\dagger \quad (2.88)$$

em que

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} \hat{O}_{11} & \hat{O}_{12} \\ \hat{O}_{21} & \hat{O}_{22} \end{pmatrix} \text{ e } \hat{O}^T = \begin{pmatrix} \hat{O}_{11} & \hat{O}_{21} \\ \hat{O}_{12} & \hat{O}_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.89)$$

Dessa forma, a correspondência de  $\hat{O}|x\rangle$  é  $\langle x|\hat{O}^\dagger$ . Ao complexo conjugado de uma matriz transposta damos o nome de *hermitiano conjugado*. Segue então que

$$\hat{O}|x\rangle = |y\rangle \quad (2.90)$$

$$\langle x|\hat{O}^\dagger = \langle y|. \quad (2.91)$$

Vamos agora voltar um pouco no tempo, precisamente no início do último capítulo, em que dissemos que observáveis são descritos por operadores. A pergunta aqui é: que tipo de operadores descreve observáveis? São aqueles tal que

$$\hat{O} = \hat{O}^\dagger, \quad (2.92)$$

*i.e.*, operadores que são iguais ao seu hermitiano conjugado. Estes são chamados de *Operadores Hermitianos*.

Podemos destacar algumas propriedades para um Operador Hermitiano:

- (a) O Operador Hermitiano possui um autovalor real;
- (b) Qualquer vetor obtido pela atuação de um Operador Hermitiano pode ser expandido como uma soma de seus autovetores;
- (c) Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são autovalores de um Operador Hermitiano, tal que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , então os autovetores correspondentes são ortogonais. O mesmo vale para o caso em que  $\lambda_1 = \lambda_2$ , entretanto, essa situação caracteriza uma degenerescência: autovetores diferentes com mesmo autovalor.

Essas propriedades podem ser entendidas como teoremas fundamentais da Mecânica Quântica, que no frígido dos ovos diz que os autovetores de um Operador Hermitiano formam uma base ortonormal.

## 2.6 As Matrizes de Pauli

Como vimos anteriormente, podemos destacar um teorema fundamental para a mecânica quântica: quantidades observáveis são descritas por Operadores Hermitianos. Dessa forma, podemos identificar cada observável de *spin* ( $s_x, s_y, s_z$ ) com um Operador Hermitiano ( $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ ), num espaço bidimensional<sup>4</sup>.

Tomando a direção *para cima/para baixo*, sabemos que os autovalores e autovetores para o operador  $\hat{\sigma}_x$  serão

$$\hat{\sigma}_x |\uparrow\rangle = +1 |\uparrow\rangle \quad (2.93)$$

e

$$\hat{\sigma}_x |\downarrow\rangle = -1 |\downarrow\rangle, \quad (2.94)$$

lembrando que  $\langle \uparrow | \downarrow \rangle = \langle \downarrow | \uparrow \rangle = 0$ . Portanto, usando a álgebra de matrizes teremos

$$\begin{pmatrix} \sigma_z^{11} & \sigma_z^{12} \\ \sigma_z^{21} & \sigma_z^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

e também

$$\begin{pmatrix} \sigma_z^{11} & \sigma_z^{12} \\ \sigma_z^{21} & \sigma_z^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.96)$$

Resolvendo essas equações, resulta que

$$(\sigma_z^{11} \times 1) + (\sigma_z^{12} \times 0) = 1 \implies \sigma_z^{11} = 1; \quad (2.97)$$

$$(\sigma_z^{21} \times 1) + (\sigma_z^{22} \times 0) = 0 \implies \sigma_z^{21} = 0, \quad (2.98)$$

e

$$(\sigma_z^{11} \times 0) + (\sigma_z^{12} \times 1) = 0 \implies \sigma_z^{12} = 0; \quad (2.99)$$

$$(\sigma_z^{21} \times 0) + (\sigma_z^{22} \times 1) = -1 \implies \sigma_z^{22} = -1. \quad (2.100)$$

Portanto,

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.101)$$

Da mesma maneira, podemos encontrar os operadores  $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$  e  $\hat{\sigma}_z$ :

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.102)$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.103)$$

<sup>4</sup> Observe que do ponto de vista observável o spin possui dois sentidos: para cima ou para baixo, que podem ser observados nos eixos  $x, y$  e  $z$ . Portanto, poderíamos pensar em para cima/para baixo, esquerda/direita ou para frente/para trás que correspondem às três direções do espaço,  $x, y$  e  $z$  de que dispomos em um laboratório.

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.104)$$

que são conhecidas por *Matrizes de Pauli*. Observe que é possível obter um operador  $\hat{\sigma}$  para uma direção qualquer, digamos  $\hat{n}$ . Isso é possível projetando  $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z) \cdot \hat{n}$ . Isso pode ser escrito na forma

$$\hat{\sigma} = n_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + n_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + n_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

$$\implies \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} n_z & (n_x - in_y) \\ (n_x + in_y) & -n_z \end{pmatrix}. \quad (2.106)$$

### 3 Bits e q-bits

Na Computação Clássica, a menor unidade de informação é conhecida como *bit* (*Binary Digit*). Um *bit* é constituído de um único valor que pode ser 0 ou 1 que, por sua vez, representam estados como ligado ou desligado. Fisicamente esses *bits* podem ser representados pela presença ou não de tensão elétrica nos componentes eletrônicos, onde a presença de tensão corresponde ao *bit* 1 (ligado) e sua ausência correspondendo ao *bit* 0 (desligado) (OLIVEIRA, 2004).

Assim como na Computação Clássica, a Computação Quântica possui um análogo para a informação, que é conhecido como *bit quântico* ou *q-bit*. Esses *q-bits* também podem assumir os valores 0 e 1, mas diferentemente da teoria clássica, onde os *bits* só podem assumir estados distintos, os *q-bits* podem assumir qualquer sobreposição de 0 e 1 simultaneamente (OLIVEIRA, 2004; FIGUEIREDO, 2013). Fisicamente, um *q-bit* pode ser representado por qualquer objeto quântico que possua dois auto-estados distintos, por exemplo a direção de um *spin* ou a polarização de um *fóton*.

Os auto-estados de um *q-bit* podem ser representados pelos *kets*

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

em que o conjunto  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  forma uma base no espaço vetorial da mecânica quântica conhecida como base computacional. Matematicamente, o estado geral de um *q-bit* é representado por

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (3.2)$$

em que  $a$  e  $b$  são números complexos e  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Podemos ainda escrever o estado de um *q-bit* na forma polar

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} [\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|1\rangle], \quad (3.3)$$

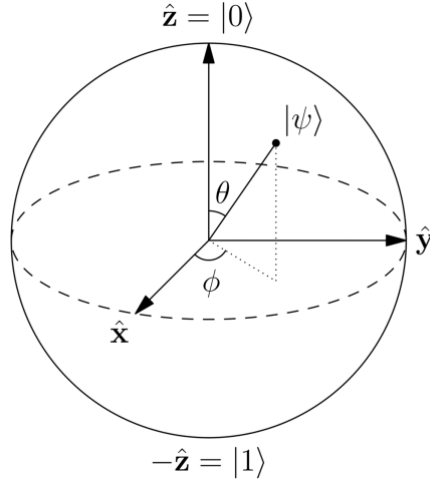
em que  $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . O termo  $e^{i\gamma}$  é conhecido como *fator de base global* (JÚNIOR; LIMA, 2006) e não possui nenhum efeito físico observável, podendo ser desconsiderado. Sendo assim, temos

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|1\rangle. \quad (3.4)$$

Além da descrição acima, podemos também representar um *q-bit* geometricamente utilizando a sua forma polar. Os valores de  $\theta$  e  $\phi$  na Equação 3.4 definem um ponto em uma esfera tridimensional de raio 1, conhecida como *esfera de Bloch* (MOTTA; CARVALHO; MACULAN, n.d.). Essa esfera pode ser vista na Figura 2. Nessa esfera, o ângulo  $\theta$  que o

vetor faz com o eixo  $z$  está relacionado com as contribuições dos estados base  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  para o estado geral do  $q$ -bit. Já a fase do  $q$ -bit corresponde ao ângulo  $\phi$  formado pela projeção do vetor sobre o plano  $xy$  com o eixo  $x$ . A Tabela 2 apresenta alguns pontos especiais na Esfera de Bloch.

Figura 2 – Esfera de Bloch com representação de um q-bit genérico



Fonte: Santos (2017)

Tabela 2 – Tabela de pontos sobre a Esfera de Bloch.

$\theta$	$\phi$	$\psi$	Observação
0	0	$ 0\rangle$	Polo norte da Esfera de Bloch
$\pi$	0	$ 1\rangle$	Polo sul da Esfera de Bloch
$\pi/2$	0	$( 0\rangle +  1\rangle)/\sqrt{2}$	Equador sobre o eixo $x$
$\pi/2$	$\pi/2$	$( 0\rangle + i 1\rangle)/\sqrt{2}$	Equador sobre o eixo $y$

Fonte: Oliveira e Sarthour (2004)

Até aqui vimos apenas estados formados por um  $q$ -bit, mas podemos estender este conceito usando um postulado da Mecânica quântica que descreve como o espaço de estados do sistema composto é construído a partir dos espaços de estados dos sistemas individuais (TEMPORAO, 2007). Então, o espaço vetorial de dois  $q$ -bits pode ser estendido pelos vetores formado pelo produto tensorial dos vetores da base computacional

$$\{|0\rangle, |1\rangle\} \otimes \{|0\rangle, |1\rangle\} = \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}. \quad (3.5)$$

Matricialmente, esses vetores de base de dois  $q$ -bits podem ser representados por

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Da mesma forma, o espaço vetorial de  $n$   $q$ -bit pode ser estendido usando o produto tensorial<sup>1</sup> dos vetores da base computacional.

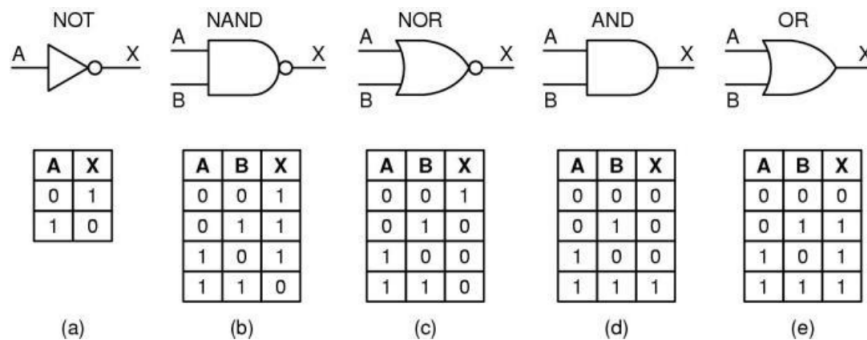
---

<sup>1</sup> Mais informações sobre produto tensorial podem ser obtidas em ([UNICAMP, n.d.](#)) e ([MONDAINI, 2006](#))

## 4 Portas quânticas

Na computação clássica existem dispositivos capazes de manipular os *bits*, esses dispositivos são conhecidos como portas lógicas. Essas portas são responsáveis por realizar o processamento de um ou mais *bits*. As portas lógicas clássicas mais conhecidas são a *NOT*, *NAND*, *NOR*, *AND* e *OR*. As entradas e saídas dessas portas são mostradas na [Figura 3](#). Além de cada porta realizar uma operação específica, é possível combinar várias dessas portas para se realizar outra tarefa mais complexa.

Figura 3 – Portas lógicas clássicas



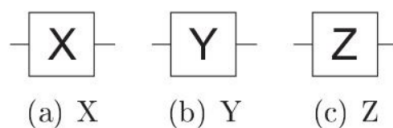
Fonte: [Pinto \(2007\)](#)

A Computação Quântica também possui uma variada quantidade de portas, conhecidas como portas quânticas. Basicamente, uma porta quântica é implementada através de uma operação unitária realizada em um *q-bit*, ou seja, essas portas podem ser vistas como operadores ou matrizes unitárias, como por exemplo as matrizes de Pauli ([BARBOSA, 2005](#))

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Esquemáticamente, essas matrizes de Pauli podem ser representadas de acordo com a [Figura 4](#).

Figura 4 – Portas de Pauli



Fonte: [Barbosa \(2005\)](#)

## 4.1 Portas quânticas de um q-bit

As portas quânticas de apenas um  $q$ -bit são infinitas. Isso se deve ao número de matrizes unitárias  $2 \times 2$  também serem infinitas. As mais conhecidas são as portas de Pauli, as portas Hadamard ou Hadamard-Walsh e a porta S. Essas portas serão apresentadas abaixo.

### 4.1.1 A Porta de Pauli $I$

Esta porta é conhecida como porta identidade, pois não tem nenhum efeito sobre o  $q$ -bit de entrada, ou seja, o  $q$ -bit na saída da porta é o mesmo que o da entrada. Essa operação é feita através da seguinte matriz:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Então, se aplicarmos a operação acima em um  $q$ -bit, temos

$$\begin{aligned} I|0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= |0\rangle; \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} I|1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= |1\rangle. \end{aligned} \quad (4.4)$$

E ainda, para um q-bit genérico,

$$\begin{aligned} I[a|0\rangle + b|1\rangle] &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= a|0\rangle + b|1\rangle. \end{aligned} \quad (4.5)$$



### 4.1.2 A Porta de Pauli $X$

A Porta de Pauli  $X$  é semelhante a uma porta lógica NOT, tendo como função inverter o estado de um  $q$ -bit. Essa porta é definida pela matriz

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Ao aplicarmos essa operação em um  $q$ -bit, temos

$$\begin{aligned} X|0\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= |1\rangle; \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} X|1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para um  $q$ -bit genérico,

$$\begin{aligned} I[a|0\rangle + b|1\rangle] &= a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a|1\rangle + b|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Outra representação para a porta quântica NOT pode ser vista na [Figura 5](#).

Figura 5 – Porta NOT



Fonte: [Barbosa \(2005\)](#)

### 4.1.3 A Porta de Pauli $Y$

A Porta  $Y$  é implementada pelo operador unitário

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Aplicando essa operação a um  $q$ -bit, temos

$$\begin{aligned} Y|0\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= i|1\rangle; \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} Y|1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -i|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para um  $q$ -bit genérico,

$$\begin{aligned} Y[a|0\rangle + b|1\rangle] &= a \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= i \left[ a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= i[a|1\rangle - b|0\rangle]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

### 4.1.4 A Porta de Pauli $Z$

A Porta  $Z$  é definida pela matriz

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Quando aplicamos essa operação a um  $q$ -bit, temos

$$\begin{aligned} Z|0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= |0\rangle; \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} Z|1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -|1\rangle. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Para um  $q$ -bit genérico,

$$\begin{aligned} Z[a|0\rangle + b|1\rangle] &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= a|0\rangle - b|1\rangle. \end{aligned} \tag{4.17}$$

#### 4.1.5 A Porta Hadamard ou Hadamard-Walsh

O operador que define a Porta Hadamard é

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Ao aplicarmos essa operação em um  $q$ -bit, temos

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}; \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
H|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Para um  $q$ -bit genérico,

$$\begin{aligned}
H[a|0\rangle + b|1\rangle] &= a \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= a \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + b \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

#### 4.1.6 A Porta $S$ de Fase

A matriz que implementa a Porta  $S$ , também conhecida como Porta de Fase é

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Aplicando a operação à um  $q$ -bit, temos

$$\begin{aligned}
S|0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= |0\rangle;
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
S|1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \\
&= i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= i|1\rangle.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Para um  $q$ -bit genérico,

$$\begin{aligned}
 S[a|0\rangle + b|1\rangle] &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + bi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= a|0\rangle + ib|1\rangle.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

## 4.2 Portas quânticas de múltiplos $q$ -bits

Assim como as portas com apenas um  $q$ -bit, as portas de múltiplos  $q$ -bits também são infinitas. Essas portas são capazes de realizar operações em mais de um  $q$ -bit. Neste texto vamos apresentar apenas as portas CNOT e Toffoli quântica.

### 4.2.1 Porta CNOT Quântica

A Porta *CNOT* (ou *NOT-controlada*) quântica é semelhante a porta *NOT* quântica, mas se diferencia por possuir um  $q$ -bit de controle. Nessa porta, o estado do  $q$ -bit será alterado se, e somente se, o estado do  $q$ -bit de controle for  $|1\rangle$ , caso contrário o  $q$ -bit permanece inalterado. A [Figura 6](#) mostra a representação gráfica da porta CNOT, onde  $\oplus$  pode ser vista como uma porta clássica *XOR*. O símbolo  $\bullet$  representa um controle e a linha vertical o alvo deste controle ([BARBOSA, 2005](#)). A matriz que implementa a porta *CNOT* com controle no primeiro  $q$ -bit é:

$$CNOT = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right). \tag{4.26}$$

Podemos então verificar que:

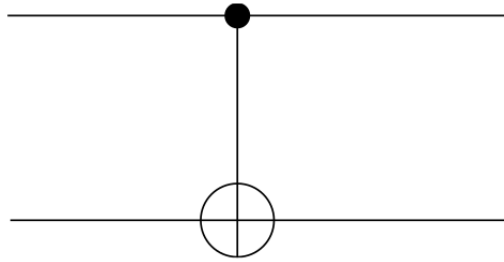
$$CNOT|00\rangle = |00\rangle; \tag{4.27}$$

$$CNOT|01\rangle = |01\rangle; \tag{4.28}$$

$$CNOT|10\rangle = |11\rangle; \tag{4.29}$$

$$CNOT|11\rangle = |10\rangle. \tag{4.30}$$

Figura 6 – Porta CNOT Quântica



Fonte: Portugal et al. (2004)

Um ponto importante a ser destacado é que qualquer operador unitário pode ser representado usando portas *CNOT* e portas de 1 *q-bit* (PORTUGAL et al., 2004).

#### 4.2.2 Porta Toffoli Quântica

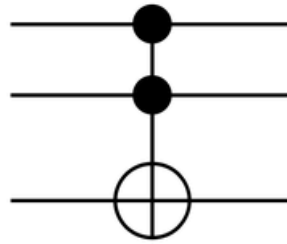
A Porta Toffoli quântica é muito semelhante à porta *CNOT* quântica, mas ao invés de ter somente um *q-bit* de controle, possui dois. Quando os dois *q-bits* de controle estão ambos no estado  $|1\rangle$ , a Porta de Toffoli inverte o estado do terceiro *q-bit*, caso contrário o *q-bit* permanece inalterado. Como podemos perceber, o espaço de estados considerado nesse caso possui um número de 3 *q-bits*, sendo assim, a matriz que representa essa operação é de 8 dimensões. A matriz abaixo representa uma porta Toffoli com controle nos dois primeiros bits

$$CCNOT = \left( \begin{array}{cccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right). \quad (4.31)$$

A Figura 7 mostra a representação de uma porta Toffoli quântica.

Quando os *q-bits* de entrada estão preparados em estados da base (ou seja, se encontram nos estados  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ ), a Porta de Toffoli tem um comportamento que permite simular várias operações clássicas. Por exemplo, se a entrada for  $|1q_20\rangle$  com  $q_2 = 0$  ou  $q_2 = 1$ , a saída será  $|1q_2q_2\rangle$ , ou seja, a porta Toffoli copia o *q-bit*  $q_2$  para o *q-bit* alvo. Agora, se a entrada for  $|1q_21\rangle$  então a saída será  $|1q_2\bar{q}_2\rangle$ , isto é, o *q-bit* alvo fica preparado no estado negado do estado do segundo *q-bit*, ou seja, a porta Toffoli funciona semelhante a uma porta clássica *NOT* (AMOREIRA, n.d.).

Figura 7 – Porta Toffoli Quântica



Fonte: Portugal et al. (2004)

Utilizando essas portas quânticas, podemos descrever todas as outras usando regras da lógica. Portanto, qualquer circuito lógico clássico pode ser implementado com a utilização de portas Toffoli num computador quântico. Mas é bom lembrar que a computação quântica possui muito mais possibilidades do que apenas àquelas propostas nos circuitos lógicos clássicos.

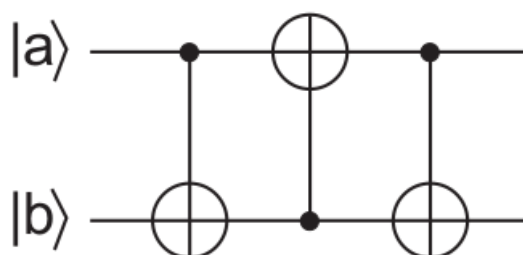
### 4.3 Circuitos quânticos: exemplos

Semelhante à Computação Clássica, quando juntarmos duas ou mais portas quânticas, temos um circuito quântico. A representação desses circuitos foi proposta por David Deutsch em 1980, que desenvolveu um modelo para a computação quântica semelhante à *Máquina de Turing*, mas que permitia a representação de sobreposição. Este modelo era muito complexo, o que levou Deutsch a criar uma representação mais simples para a Computação Quântica que se assemelhava com os modelos de circuitos lógicos clássicos (BARBOSA, 2005). Abaixo serão apresentados dois exemplos simples de circuitos quânticos, um *swap* e um somador de dois bits.

#### 4.3.1 Circuito Quântico Swap

A Figura 8 mostra o esquemático de um Circuito Swap.

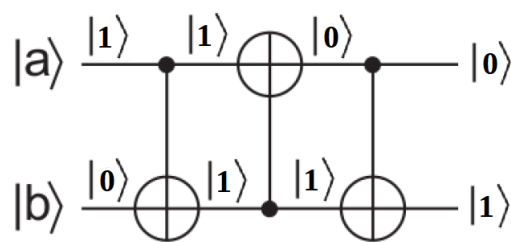
Figura 8 – Circuito Quântico Swap



Fonte: Barbosa (2005)

Esse circuito é composto por três portas *CNOT*. Seu funcionamento é o seguinte: supondo que os *q-bits* de entrada do circuito *swap* sejam  $|a\rangle = |1\rangle$  e  $|b\rangle = |0\rangle$ , ao passar pela primeira porta *CNOT* esses estados serão  $|a\rangle = |1\rangle$  e  $|b\rangle = |1\rangle$ , que por sua vez serão a entrada da segunda porta *CNOT*. Ao passar pela segunda porta *CNOT*, os estados serão  $|a\rangle = |0\rangle$  e  $|b\rangle = |1\rangle$ , esses estados por sua vez serão a entrada da terceira e última porta *CNOT*. E para terminar a operação, ao passar pela terceira porta *CNOT*, os *q-bits* serão  $|a\rangle = |0\rangle$  e  $|b\rangle = |1\rangle$ . Como podemos observar, os *q-bits*  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$  trocaram os seus valores ao passar pelo circuito de *swap*. A Figura 9 mostra essa execução passo a passo.

Figura 9 – Execução do circuito quântico swap para as entradas  $|1\rangle$  e  $|0\rangle$



Fonte: modificado de Barbosa (2005)

Na Tabela 3 podemos ver algumas entradas e suas respectivas saídas para este circuito quântico.

Tabela 3 – Entradas e saídas para o Circuito *Swap*.

Entradas		Saídas	
$ a\rangle$	$ b\rangle$	$ a\rangle$	$ b\rangle$
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$

Fonte: Barbosa (2005)

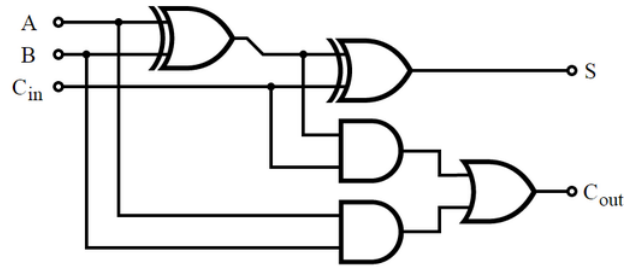
### 4.3.2 Circuito Quântico Somador Completo de 1 q-bit

O Circuito Somador Completo de um *bit* Clássico é responsável por somar dois *bits* quaisquer e um *bit* de *carry*. Esse circuito possui três entradas  $A$ ,  $B$  e  $C_{in}$ , como podemos ver na Figura 10, onde o  $C_{in}$  é o *carry* de entrada (*carry-in*). Como saída, temos o resultado da soma em  $S$  e o *carry* de saída (*carry-out*) em  $C_{out}$ . A Tabela 4 apresenta a tabela verdade para esse circuito.

Assim como no circuito clássico, o somador completo quântico, apresentado na Figura 11, possui três *q-bits* de entrada. Os *q-bits*  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$  são os dois operandos,  $|c_e\rangle$  é o *carry* de entrada proveniente da soma anterior. Na saída temos o resultado da soma que



Figura 10 – Circuito Somador Completo



Fonte: IFSC (2018)

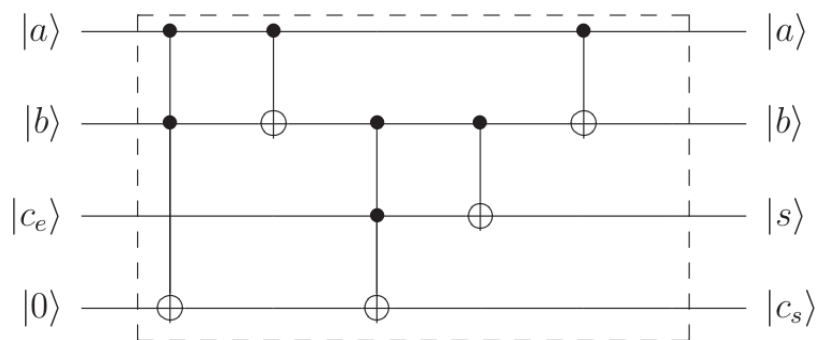
Tabela 4 – Tabela verdade do Circuito Somador Completo de 1 bit.

$A$	$B$	$C_{in}$	$S$	$C_{out}$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

Fonte: IFSC (2018)

está no  $q$ -bit  $|s\rangle$  e o *carry* de saída que está em  $|c_s\rangle$ . Assim como nos modelos de circuitos lógicos clássicos, esse circuito quântico também pode ser colocado em série ou em cascata para a adição de números binários.

Figura 11 – Somador Completo Quântico

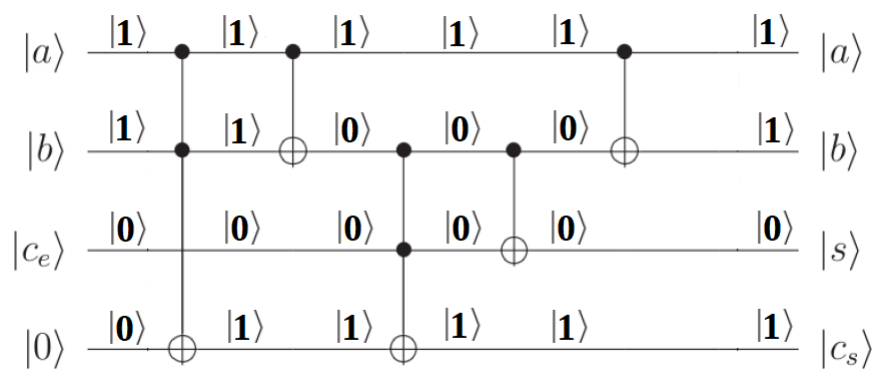


Fonte: Júnior e Lima (2006)

Vamos ver um exemplo de execução desse circuito, onde as entradas serão:  $|a\rangle = |1\rangle$ ,  $|b\rangle = |1\rangle$  e  $|C_e\rangle = |0\rangle$ . Essa execução é mostrada na Figura 12. Como podemos ver, a soma de  $|1\rangle + |1\rangle$  com o  $q$ -bit de *carry*  $|0\rangle$  gera como saída o  $q$ -bit  $|0\rangle$  e o  $q$ -bit de *carry* igual a

$|1\rangle$ .

Figura 12 – Exemplo de operação no circuito somador completo quântico



Fonte: modificado de Júnior e Lima (2006)

## 5 Algoritmos Quânticos

### 5.1 Algoritmo de Procura Simples

O algoritmo que veremos nessa seção utiliza os conceitos do paralelismo presente nos circuitos quânticos para realizar uma busca ou procura simples (AMOREIRA, n.d.). Imagine que você está em um corredor com quatro portas, onde cada porta dá acesso a uma sala. Dentro de uma dessas salas encontra-se um objeto qualquer e as outras três salas restantes estão vazias. Caso você queira saber em qual das salas está o objeto, você terá que olhar em cada uma das quatro salas até encontrar, na pior das hipóteses todas as salas terão que ser visitadas. Agora, imagine se você pudesse olhar o que tem dentro de todas as quatro salas simultaneamente, isso economizaria tempo e esforço. A computação quântica nos permite realizar esse paralelismo. O algoritmo que vamos estudar a seguir nos permite obter a resposta de problemas parecidos com o citado acima usando apenas de uma tentativa.

Vamos supor que cada uma das salas sejam representadas por números de 0 a 3 expressos em binário, ou seja 00, 01, 10 e 11 e  $f(x), x \in \{0, 1\}^2$  seja uma função que representa o resultado de uma tentativa, sendo que se  $f(x) = 1$  o objeto se encontra na sala e  $f(x) = 0$  caso contrário. Para implementar essa função será necessário uma porta quântica com 3  $q$ -bits, onde o último  $q$ -bit é reservado para armazenar o resultado da operação, em soma módulo 2 com o valor inicial desse  $q$ -bit.

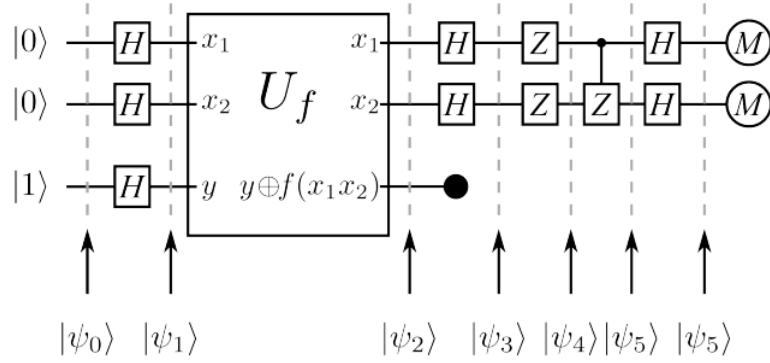
Tomando o circuito da Figura 13 e o estado de entrada sendo  $|\psi_0\rangle = |001\rangle = |0\rangle|0\rangle|1\rangle$  temos como primeira operação as Portas de Hadamard. Realizado essas operações temos

$$\begin{aligned}
 |\psi_1\rangle &= \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{2} [(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)] \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{2} [|0\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle] \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{2} [|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle] \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

Agora vamos analisar como a porta  $U_f$  transforma cada um desses estados presentes no lado direito da equação acima. Podemos reescrever cada um dos estados na forma

$$|x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{5.2}$$

Figura 13 – Circuito quântico para o Algoritmo de Procura Simples



Fonte: Amoreira (n.d.)

onde  $x$  é uma sequência arbitrária de dois bits. Ao passar pela porta  $U_f$  temos a seguinte transformação:

$$\begin{aligned} U_f |x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} &= \frac{U_f |x\rangle |0\rangle - U_f |x\rangle |1\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|x\rangle |f(x)\rangle - |x\rangle |\bar{f}(x)\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Como  $f$  é uma função binária, temos que  $f(x) = 0$  ou  $f(x) = 1$ . Sendo assim, no caso de  $f(x) = 0$ , temos

$$\frac{|x\rangle |f(x)\rangle - |x\rangle |\bar{f}(x)\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|x\rangle |0\rangle - |x\rangle |1\rangle}{\sqrt{2}} = |x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}; \quad (5.4)$$

no caso de  $f(x) = 1$ ,

$$\frac{|x\rangle |f(x)\rangle - |x\rangle |\bar{f}(x)\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|x\rangle |1\rangle - |x\rangle |0\rangle}{\sqrt{2}} = |x\rangle \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}} = -|x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (5.5)$$

Podemos observar que, nos dois casos

$$U_f |x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = (-1)^{f(x)} |x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (5.6)$$

ou seja,  $U_f = (-1)^{f(x)}$ . Usando esse resultado para transformar o estado  $|\psi_1\rangle$ , temos

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= U_f |\psi_1\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left[ (-1)^{f(x)} |00\rangle + (-1)^{f(x)} |01\rangle + (-1)^{f(x)} |10\rangle + (-1)^{f(x)} |11\rangle \right] \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Mas, lembrando que  $f(x)$  é nulo para todos os valores de  $x \in \{0, 1\}^2$  e 1 no caso do valor que corresponde a sala que contém o objeto. Sendo assim, o estado que os dois primeiros

$q$ -bits podem assumir são um dos apresentados abaixo. Como o terceiro  $q$ -bit não tem mais nenhuma funcionalidade vamos descartá-lo:

$$|\psi_2\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2}(-|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) & \text{se } f(00) = 1; \\ \frac{1}{2}(+|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) & \text{se } f(01) = 1; \\ \frac{1}{2}(+|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) & \text{se } f(10) = 1; \\ \frac{1}{2}(+|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) & \text{se } f(11) = 1. \end{cases} \quad (5.8)$$

Note que essas quatro possibilidades não estão em sobreposição, ou seja, apenas uma delas acontece de acordo com a sala que contém o objeto. Esses quatro estados são ortogonais entre si e podem ser transformados mediante operadores unitários nos seus estados base, e é isso que o restante do circuito faz. Temos então que analisar o efeito do circuito sobre cada uma das possibilidades de  $|\psi_2\rangle$ . Vamos começar para o caso do objeto estar na sala 00, sendo assim  $f(00) = 1$  e  $|\psi_2\rangle$  é

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle_{(00)} &= \frac{1}{2}[-|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle] \\ &= \frac{1}{2}[-|0\rangle(|0\rangle - |1\rangle) + |1\rangle(|0\rangle + |1\rangle)]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

A próxima parte do circuito são portas de Hadamard. Essas portas vão transformar o estado  $|\psi_2\rangle_{(00)}$  acima em

$$\begin{aligned} |\psi_3\rangle_{(00)} &= \frac{1}{2} \left[ - \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} [-(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle - |0\rangle + |1\rangle)] + \\ &+ \frac{1}{4} [(|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle + |0\rangle - |1\rangle)] \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$= \frac{1}{2} [-(|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle + (|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle]. \quad (5.12)$$

Agora, ao passar pelas portas  $Z$ , os  $|0\rangle$  não são alterados, já os  $|1\rangle$  tem o seu sinal trocado. Então,

$$|\psi_4\rangle_{(00)} = \frac{1}{2} [(|0\rangle - |1\rangle)|1\rangle + (|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle]. \quad (5.13)$$

A próxima etapa é uma porta  $C$ - $Z$ , ou seja, uma  $Z$  controlada, onde a porta  $Z$  é aplicada ao segundo  $q$ -bit somente se o primeiro  $q$ -bit for  $|1\rangle$ . Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} |\psi_5\rangle_{(00)} &= \frac{1}{2} [(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle + (|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle] \\ &= \frac{1}{2} [(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)] \\ &= \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

A última operação do circuito são portas que Hadamard. Essas portas transformam o estado acima nos estados da base, sendo assim,

$$\begin{aligned}
|\psi_6\rangle_{(00)} &= H |\psi_5\rangle_{(00)} \\
&= H \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \\
&= H \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} [(|0\rangle + |1\rangle + |0\rangle - |1\rangle) (|0\rangle + |1\rangle + |0\rangle - |1\rangle)] \\
&= \frac{1}{4} [(2|0\rangle)(2|0\rangle)] \\
&= \frac{1}{4} [4|00\rangle] \\
&= |00\rangle.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Para o demais valores de  $x$  (01, 10 e 11), temos como resultado

$$|\psi_6\rangle_{(01)} = |01\rangle; \tag{5.16}$$

$$|\psi_6\rangle_{(10)} = |10\rangle; \tag{5.17}$$

$$|\psi_6\rangle_{(11)} = |11\rangle. \tag{5.18}$$

Podemos observar que o resultado do circuito é sempre o número que corresponde a sala onde se encontra o objeto, podendo essa sala ser conhecida com apenas uma tentativa. Além disso, este algoritmo pode facilmente ser generalizado para um número maior de salas, mostrando ainda mais sua eficiência.

## 5.2 O Algoritmo de Deutsch

Antes de entrarmos na explicação do Algoritmo de Deutsch, vamos primeiro entender o problema que este se propõe a resolver.

### 5.2.1 O problema de Deutsch

O problema de Deutsch consiste em saber se uma dada função  $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$  é balanceada ou constante (CABRAL; LIMA; JR., 2004). A Tabela 5 abaixo mostra as quatro funções possíveis. Imagine se tivéssemos que descobrir se uma função  $f$  é balanceada ou constante usando a teoria clássica. Teríamos que calcular os valores de  $f(0)$  e  $f(1)$  e comparar os resultados: se ambos os resultados forem iguais a função é constante, caso contrário é balanceada. Uma maneira de realizar essa comparação é calculando a soma

Tabela 5 – Funções do tipo  $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ .

$x$	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	1	0	0	1
1	1	0	1	0

constantes      balanceadas

Fonte: Cabral, Lima e Jr. (2004)

módulo 2:

$$f(0) \oplus f(1) = \begin{cases} 0, & \text{se } f \text{ é constante} \\ 1, & \text{se } f \text{ é balanceada,} \end{cases} \quad (5.19)$$

pois

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0 \quad (5.20)$$

e

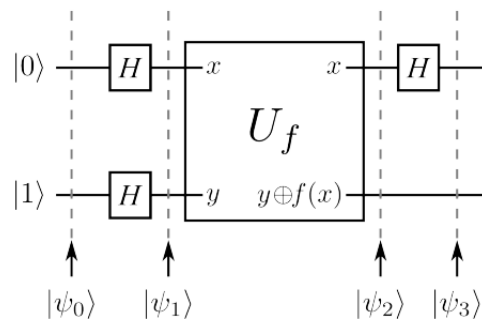
$$0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1. \quad (5.21)$$

É possível resolver o problema descrito acima aproveitando do paralelismo quântico. Uma das formas de se resolver tal problema é usando um algoritmo conhecido como Algoritmo de Deutsch.

### 5.2.2 O Algoritmo de Deutsch

Vamos analisar o circuito da Figura 14 que possui como entrada o estado  $|\psi_0\rangle = |01\rangle = |0\rangle |1\rangle$ .

Figura 14 – Circuito quântico que implementa o Algoritmo de Deutsch



Fonte: Amoreira (n.d.)

Na entrada do circuito temos duas portas de Hadamard, essas portas transformam o estado  $|\psi_0\rangle$  em

$$|\psi_1\rangle = H |\psi_0\rangle \quad (5.22)$$

$$= \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (5.23)$$

Logo depois das portas de Hadamard temos a porta  $U_f$ . Como vimos no algoritmo de procura simples, o efeito dessa porta sobre um estado  $|x\rangle$   $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$  é

$$U_f |x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = (-1)^{f(x)} |x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (5.24)$$

Temos então que a saída da porta  $U_f$  é

$$|\psi_2\rangle = \begin{cases} (-1)^{f(0)} \left[ \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \left[ \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \right], & \text{se } f(0) = f(1) \\ (-1)^{f(0)} \left[ \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \left[ \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \right], & \text{se } f(0) \neq f(1). \end{cases} \quad (5.25)$$

A última etapa do circuito é uma Porta de Hadamard que atua no primeiro  $q$ -bit do estado acima. No primeiro caso temos que

$$H \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = |0\rangle, \quad (5.26)$$

e no segundo caso

$$H \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = |1\rangle. \quad (5.27)$$

Sendo assim, a saída do circuito é

$$|\psi_3\rangle = \begin{cases} (-1)^{f(0)} |0\rangle \left[ \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \right], & \text{se } f(0) = f(1) \\ (-1)^{f(0)} |1\rangle \left[ \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \right], & \text{se } f(0) \neq f(1). \end{cases} \quad (5.28)$$

Mas tomando ainda a [Equação 5.19](#), podemos escrever esse resultado como

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} |f(0) \oplus f(1)\rangle \left[ \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right]. \quad (5.29)$$

A resposta para o problema citado está no primeiro  $q$ -bit, ou seja, se fizermos uma medição do primeiro  $q$ -bit vamos encontrar o valor da propriedade global da função  $f(0) \oplus f(1)$ . Mas ainda é importante lembrar que o resultado de  $f(0) \oplus f(1)$  tem valor de 0 ou 1, então o primeiro  $q$ -bit está num dos estados da base, e não numa sobreposição desses estados ([AMOREIRA, n.d.](#)).



## 6 Emaranhamento Quântico

Um sistema quântico tem associado a si um *Espaço de Hilbert*<sup>1</sup> que representa todos os estados possíveis do sistema. Quando um sistema é composto (formado por mais de um sistema simples), o espaço deste sistema é construído a partir do produto tensorial dos espaços de Hilbert associado a cada parte do sistema. Um exemplo de sistema composto é aquele onde as suas partes não interagem entre si no presente, mas interagiram em algum momento no passado. É no estudo desse tipo de sistema que surge o conceito de emaranhamento. Por exemplo, considere dois sistemas quânticos, em que o primeiro esteja em um estado arbitrário  $|x\rangle_A$  e o segundo em um estado arbitrário  $|x\rangle_B$ . Se o estado do sistema composto por estes dois estados puder ser escrito como o produto tensorial entre  $|x\rangle_A \otimes |x\rangle_B$ , então o sistema é dito separável, caso contrário chamamos este estado de emaranhado (ZUBEN, 2007).

Para entender melhor esse assunto, vamos fazer uma análise histórica do surgimento do conceito de emaranhamento. Em 1935, Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen (EPR) apresentaram um artigo contendo as implicações lógicas do princípio da superposição quando aplicado na descrição de um sistema composto (RIGOLIN, 2005). Esse artigo tem como principal objetivo provar que a teoria da Mecânica Quântica era incompleta. De acordo com EPR uma teoria é dita completa se contemplar o que definem como elementos de realidade. Esses elementos de realidade seriam qualquer grandeza física cujo valor pudesse ser previsto antes que uma medida fosse realizada. Mas, na Mecânica Quântica, não é possível prever o resultado de uma medição do ponto de vista determinístico, mas sim as probabilidades dos possíveis resultados. Sendo assim os autores chegaram à conclusão que a teoria da Mecânica Quântica seria incompleta (OLIVEIRA; SARTHOUR, 2004).

Neste mesmo ano, Erwin Schrödinger sugere com um experimento mental as consequências do princípio da superposição quando aplicado a um sistema composto de duas partes. Este experimento consiste em um gato dentro de uma caixa completamente fechada. Dentro da caixa também há um átomo instável ( $|\text{átomo } 1\rangle$ ) que pode decair para um outro átomo mais estável ( $|\text{átomo } 2\rangle$ ). Vamos supor então, que a energia liberada por esse decaimento é capaz de acionar um mecanismo que libera um gás venenoso matando o gato (RIGOLIN, 2005). A Mecânica Quântica prevê a probabilidade de o átomo instável decair mas não prevê o momento exato para isso acontecer, então, o estado do gato pode

<sup>1</sup> O Espaço de Hilbert pode ser visto como uma estrutura matemática formada pelas funções de estado dos objetos quânticos, ou seja, podemos dizer que estados quânticos são “vetores” de espaços de Hilbert. Mais detalhes podem ser encontrados em (FLOQUET et al., 2018; BARATA, 2018)

ser visto como uma sobreposição de estados

$$|\psi\rangle = a|\text{átomo } 1\rangle|vivo\rangle + b|\text{átomo } 2\rangle|morto\rangle. \quad (6.1)$$

O estado acima representa uma sobreposição dos estados vivo e morto do gato. Para dar mais ênfase a conexão entre os dois sistemas (gato e átomo), Schrödinger introduz um conceito que foi traduzido para o português como emaranhamento. Mas as ideias apresentadas por Schrödinger e no artigo de EPR não tiveram tanto impacto na época pois questões como realismo e não-localidade eram considerados apenas como filosóficas.

Ainda em 1935, Niels Bohr contestou o artigo de EPR. Enquanto Einstein afirmava que a polarização de cada fóton é governada por uma “variável escondida”, ou seja, este fóton teria uma polarização bem definida, a *Escola de Copenhague* afirmava que não se pode atribuir uma polarização a um *fóton* até que o mesmo seja medido. Durante alguns anos esse questionamento ficou sem nenhuma resposta (JR., 2006).

Em 1964, John Bell mostrou que a Mecânica Quântica é incompatível com o conceito de localidade e que o fato de supor que existem variáveis escondidas contraria as previsões da mecânica quântica. Ele mostrou que quando aplicado a sistemas compostos, o princípio da superposição produz previsões quantitativas que, se fossem confirmadas experimentalmente provaria os aspectos da não localidade da mecânica quântica. Para isso, diferentemente do sistema usado por EPR, Bell usou o sistema quântico mais simples possível, o sistema de dois níveis (por exemplo a polarização de dois fótons ou o spin de dois elétrons) (RIGOLIN, 2005). Estas previsões, desenvolvidas por Bell com um pequeno número de hipóteses, levaram ao que conhecemos hoje como *Desigualdade de Bell* (BULNES, 2005). A Desigualdade de Bell estabelece um limite superior para a correlação entre medidas feitas em observáveis de *q-bits* separados. De maneira geral, a desigualdade trata de argumentos puramente estatísticos, onde uma determinada grandeza  $S$  não deveria ultrapassar o valor 2, assumindo a inexistência de efeitos não-locais. Mas a mecânica quântica previa o valor  $S = 2\sqrt{2} \approx 2,83$ , violando assim a Desigualdade de Bell (OLIVEIRA; SARTHOUR, 2004).

Para verificar essas desigualdades, as primeiras experiências foram desenvolvidas em 1972 por John F. Clauser e S Freedman (BULNES, 2005). Pouco depois, A. Aspect apresentou um novo onde, em experimento meados de 1981-1982, A. Aspect, P. Grangier e J. Dalibard, tiveram êxito ao mostrarem a existência de situações que violam as desigualdades de Bell, o que contrariava as teorias de variáveis escondidas e dando ainda mais força de que a natureza funciona de acordo com as previsões da mecânica quântica. Esses experimentos são conhecidos com *Experimentos de Aspect*.

Esses experimentos se caracterizavam pela medição de pares de *fótons* que eram emitidos ao mesmo tempo por meio de transições eletrônicas. Para isso foram utilizados

dois analisadores de polarização com distância de 13  $m$  entre eles e um circuito para contar as coincidências (*fótons* “gêmeos”) que ocorrem em uma taxa de tempo de 20  $ns$ , determinando assim a taxa de coincidência. Existem dois fatos que devem ser levados em consideração no experimento. Primeiro, para que uma leitura seja contada como coincidência, os *fótons* devem ser detectados em um tempo de chegada inferior a 20  $ns$  de um para outro. E em segundo lugar, como os dois analisadores de polarização estão separados por uma distância de 13  $m$ , qualquer sinal contendo informação que viaje na velocidade da luz levará no mínimo 40  $ns$  para ir de um analisador ao outro. Como o circuito possui uma janela de 20  $ns$ , qualquer comunicação entre os dois *fótons* que não viole a teoria da relatividade restrita (nenhum objeto pode estar em uma velocidade maior que a velocidade da luz no vácuo) será impossível. Após a realização desses experimentos, a conclusão é de que as Desigualdades de Bell podem ser violadas (BULNES, 2005).

## 6.1 Exemplos de estados emaranhados: estados de Bell

Os estados de Bell podem ser vistos como vetores no *Espaço de Hilbert* correspondente a sistemas quânticos formados por duas partículas. Esses vetores são:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle); \quad (6.2)$$

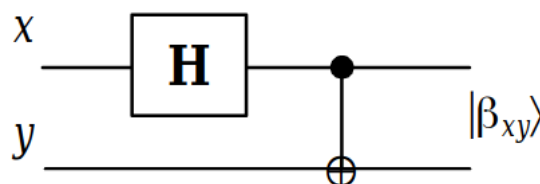
$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle); \quad (6.3)$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle); \quad (6.4)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (6.5)$$

Esses estados podem ser obtidos usando as Portas de Hadamard e a porta *CNOT* Quântica de acordo com o circuito da Figura 15.

Figura 15 – Circuito quântico para gerar os estados de Bell



Fonte: Zuben (2007)

No primeiro caso teremos como entrada do circuito o estado  $|\Psi_0^+\rangle = |00\rangle = |0\rangle|0\rangle$ . Passando pela Porta de Hadamard, temos

$$\begin{aligned} |\Psi_1^+\rangle &= H|\Psi_0^+\rangle \\ &= H|0\rangle|0\rangle \\ &= \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}|0\rangle \\ &= \frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

E agora, passando pela Porta *CNOT*, temos

$$\begin{aligned} |\Psi^+\rangle &= CNOT|\Psi_1^+\rangle \\ &= CNOT\frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Para o segundo caso, vamos considerar o estado de entrada como  $|\Psi_0^-\rangle = |10\rangle = |1\rangle|0\rangle$ . Passando pela Porta de Hadamard, temos

$$\begin{aligned} |\Psi_1^-\rangle &= H|\Psi_0^-\rangle \\ &= H|1\rangle|0\rangle \\ &= \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}|0\rangle \\ &= \frac{|00\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{6.8}$$

E agora, passando pela Porta *CNOT*, temos

$$\begin{aligned} |\Psi^-\rangle &= CNOT|\Psi_1^-\rangle \\ &= CNOT\frac{|00\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

No terceiro caso, vamos tomar o estado de entrada sendo  $|\Phi_0^+\rangle = |01\rangle = |0\rangle|1\rangle$ . Passando pela Porta de Hadamard, temos

$$\begin{aligned} |\Phi_1^+\rangle &= H|\Phi_0^+\rangle \\ &= H|0\rangle|1\rangle \\ &= \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}|1\rangle \\ &= \frac{|01\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Agora, aplicando a Porta *CNOT*, temos

$$\begin{aligned}
 |\Phi^+\rangle &= CNOT |\Psi_1^+\rangle \\
 &= CNOT \frac{|01\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Para o último caso, temos como entrada o estado  $|\Phi_0^-\rangle = |11\rangle = |1\rangle|1\rangle$ ,

$$\begin{aligned}
 |\Phi_1^-\rangle &= H |\Phi_0^-\rangle \\
 &= H |1\rangle|1\rangle \\
 &= \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} |1\rangle \\
 &= \frac{|01\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Agora, aplicando a Porta *CNOT*, temos

$$\begin{aligned}
 |\Phi^-\rangle &= CNOT |\Psi_1^-\rangle \\
 &= CNOT \frac{|01\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Mas, lembrando ainda que, tão importante quanto produzir um estado de Bell, é conseguir ler esses estados. Para isso, podemos aplicar as operações acima na ordem inversa sobre o estado de Bell, obtendo a leitura do mesmo. Isso é possível pois estes estados se relacionam unicamente com um dos elementos da base computacional (BULNES, 2005).

## 6.2 Codificação suspensa

A codificação suspensa pode ser vista como uma maneira de condensar o envio de bits clássicos. Essa aplicação do emaranhamento quântico apresenta a ideia de que estados maximamente emaranhados podem aumentar a capacidade de comunicação entre dois dispositivos. Por exemplo, para que dois bits clássicos sejam transmitidos por um canal também clássico é preciso fazer a manipulação ou envio de duas partículas ou entidades físicas, onde cada uma dessas partículas está relacionada a um dos bits. Na codificação suspensa é possível enviar os mesmos dois bits de informação usando os estados de Bell. Para entendermos o lado quântico dessa história, vamos supor que Alice queira enviar uma mensagem para Bob. Inicialmente, Alice e Bob compartilham o seguinte estado de Bell:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{6.14}$$

Suponha que Alice deseja enviar pra Bob a sequência de bits 10. O que Alice tem que fazer é aplicar a operação  $X$  ( $NOT$ ) no seu  $q$ -bit, obtendo o seguinte estado:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{|10\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (6.15)$$

Agora Alice deve enviar o seu  $q$ -bit para Bob que aplica as operações  $CNOT$  e  $H$  e logo em seguida realiza uma medida na base computacional, obtendo assim a mensagem enviada por Alice. Dessa forma, Alice enviou 2 bits de informação clássica para Bob, enviando apenas 1  $q$ -bit de informação quântica (OLIVEIRA; SARTHOUR, 2004).

### 6.3 Teleporte quântico

O teleporte quântico é uma das aplicações mais interessantes da Mecânica Quântica. Em sistemas clássicos, a informação é transportada através de um meio material, por exemplo, o som da nossa voz que é transmitida por meio de ondas mecânicas no ar, ou os sinais de rádio, que são transportados por ondas eletromagnéticas. Diferentemente desses casos, o teleporte quântico não precisa de um meio material para que o transporte de informação seja realizado, assim como é o caso da luz, que também não precisa de um meio material para se propagar. Segundo Oliveira e Sarthour (2004), O teleporte é um processo através do qual o estado de um  $q$ -bit é transferido para outro utilizando as propriedades não-locais de estados emaranhados. Ou seja, se comparado com a codificação suspensa, o teleporte não envolve o transporte de um  $q$ -bit, mas sim a transferência de estados quânticos. Novamente, para facilitar o entendimento vamos supor que Alice queira se comunicar com Bob por um canal quântico. A informação a qual Alice quer transmitir a Bob está contida no  $q$ -bit  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ .

Antes de começarmos a imaginar o processo para transportar essa informação, vale relembrar que estados quânticos não podem ser clonados e nem copiados. A tentativa de copiar ou clonar um dado estado causa a destruição do mesmo. Então, qualquer tentativa de medir o estado  $|\psi\rangle$  o destruirá. Sendo assim, a única forma de transportar  $|\psi\rangle$  é enviando uma informação clássica de Alice para Bob (ZUBEN, 2007).

Agora, vamos supor também que Alice e Bob compartilham o estado emaranhado

$$|\Phi^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (6.16)$$

ou seja, cada um recebe um  $q$ -bit do estado de Bell acima. O estado formado pelo  $q$ -bit que contém a mensagem e o estado de Bell é:

$$|\Psi_0\rangle = |\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle \quad (6.17)$$

$$= \frac{a(|000\rangle + |011\rangle)}{\sqrt{2}} + \frac{b(|100\rangle + |111\rangle)}{\sqrt{2}}. \quad (6.18)$$

Os primeiros dois  $q$ -bits são controlados por Alice, já o terceiro está sobre o controle de Bob. Alice aplica então os passos da codificação suspensa (uma Porta  $CNOT$  seguida da Porta de Hadarmad). Essas operações são feitas nos dois primeiros  $q$ -bits que são controladas por Alice. Para isso, vamos aplicar a transformação  $(H \otimes I \otimes I)(CNOT \otimes I)$  em que  $I$  é uma matriz identidade. Sendo assim, obtemos

$$\begin{aligned}
|\Psi_1\rangle &= (H \otimes I \otimes I)(CNOT \otimes I)|\Psi_0\rangle \\
&= (H \otimes I \otimes I) \left[ \frac{a(|000\rangle + |011\rangle)}{\sqrt{2}} + \frac{b(|110\rangle + |101\rangle)}{\sqrt{2}} \right] \\
&= (H \otimes I \otimes I) \left[ \frac{a|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle)}{\sqrt{2}} + \frac{b|1\rangle(|10\rangle + |01\rangle)}{\sqrt{2}} \right] \\
&= \frac{a(|0\rangle + |1\rangle)(|00\rangle + |11\rangle)}{2} + \frac{b(|0\rangle - |1\rangle)(|10\rangle + |01\rangle)}{2} \\
&= \frac{|00\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle)}{2} + \frac{|01\rangle(a|1\rangle + b|0\rangle)}{2} + \frac{|10\rangle(a|0\rangle - b|1\rangle)}{2} + \\
&\quad + \frac{|11\rangle(a|1\rangle - b|0\rangle)}{2}. \tag{6.19}
\end{aligned}$$

Agora, Alice deve medir os seus dois  $q$ -bits, o que acarreta em um colapso do estado em uma de quatro possibilidades: 00, 01, 10, 11. O resultado que Alice encontra é enviado para Bob usando um canal clássico. Com esse resultado, Bob pode descobrir quais das quatro operações ele deve aplicar a seu  $q$ -bit para colocá-lo no estado superposto  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ . A [Tabela 6](#) relaciona cada uma das possibilidades com sua operação.

Tabela 6 –  $Q$ -bits lidos por Alice e operação realizada por Bob.

Bits recebidos	Estado	Transformação
00	$a 0\rangle + b 1\rangle$	I
01	$a 1\rangle + b 0\rangle$	X
10	$a 0\rangle - b 1\rangle$	Z
11	$a 1\rangle - b 0\rangle$	Y

Fonte: [Zuben \(2007\)](#)

Vale lembrar que, quando adicionamos um canal de comunicação clássico ao experimento torna-se impossível que a informação que Alice adquire com sua medida sobre o estado do  $q$ -bit chegue instantaneamente a Bob. É importante ressaltar também que a palavra teleporte ou teletransporte é muito utilizada em filmes de ficção científica para descrever o processo de destruir um objeto em um determinado local e reconstruí-lo em outro. O teleporte quântico possui esse nome por possuir características similares: primeiro, os  $q$ -bits são codificados como bits clássicos; depois, a informação é transmitida e a original é destruída durante o processo; e por último, o  $q$ -bit é reconstruído a partir dos bits clássicos e do par EPR.

Apesar de parecer roteiro de filme de ficção científica, o teleporte quântico já é algo muito real. Cientistas japoneses realizaram o teletransporte quântico de um conjunto complexo de informações (ROTHMAN, 2011). Mais recentemente, pesquisadores chineses anunciaram o lançamento do satélite Micius. Os cientistas conseguiram usar a rede quântica do dispositivo para teletransportar uma partícula da superfície terrestre para a atmosfera pela primeira vez (GALILEU, 2017) e (REN et al., 2017).

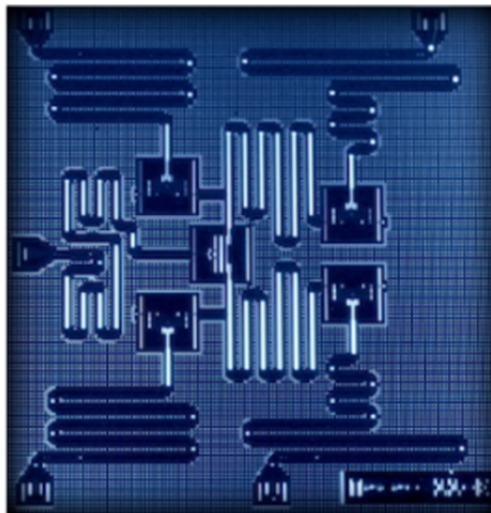


## 7 IBM Quantum Experience

A IBM é uma das empresas pioneiras na fabricação de computadores desde o início da era da computação. Com essa perspectiva a empresa também não ficou de fora na implementação de computadores quânticos. No início de 2017, a IBM disponibilizou em “nuvem” um protótipo de computador quântico com cinco *q-bits*. Neste mesmo ano, a empresa disponibilizou um segundo processador, já com 20 *q-bits* e chegou ao número de 50 *q-bits* no final de 2017 (OLIVEIRA, 2018). Além disso, a IBM anunciou, nesse mesmo ano de 2018, o programa IBM Q Experience: uma plataforma baseada em nuvem para experimentação e aprendizado quântico compartilhado (IBM, 2018). Este capítulo tem como objetivo apresentar essa ferramenta da IBM que pode ser usada por cientistas, pesquisadores ou interessados pela área.

O computador quântico disponibilizado pela IBM para experimentação online possui 5 *q-bits*. Não vamos entrar em muitos detalhes de implementação, mas este computador se baseia no modelo de computação quântica via fluxo magnético em *q-bits* supercondutores. As Figuras 16 e 17 mostram o chip quântico da IBM e a disposição dos *q-bits*, respectivamente.

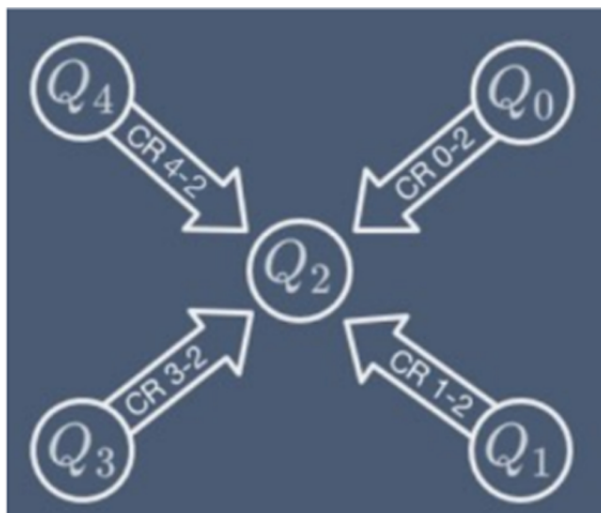
Figura 16 – Chip quântico da IBM



Fonte: Santos (2017)

Para usar esse recurso disponibilizado pela IBM devemos acessar o site do programa que se encontra em: <<https://quantumexperience.ng.bluemix.net/qx>>. Antes de começar a usar a plataforma o usuário deve realizar um cadastro podendo depois acessar o editor pelo link <<https://quantumexperience.ng.bluemix.net/qx/editor>>. Esta página de edição

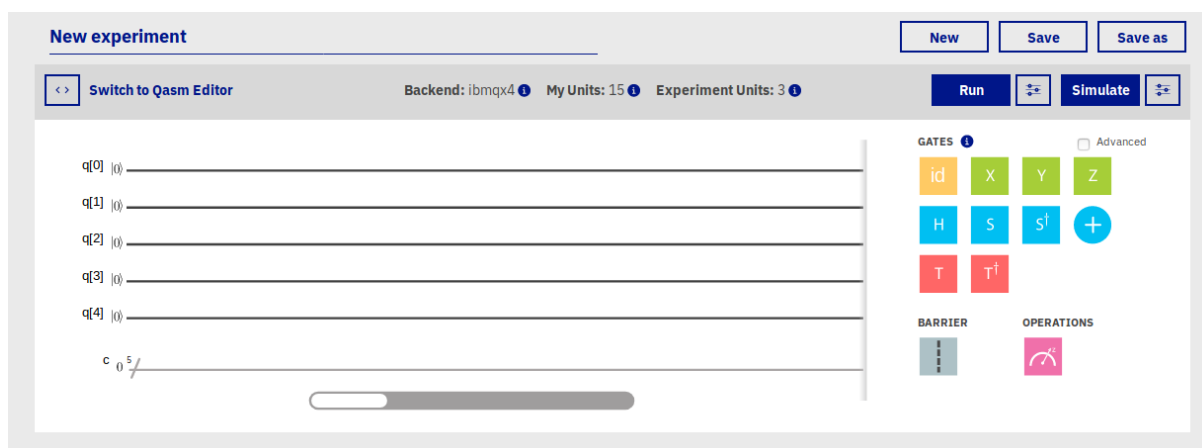
Figura 17 – Localização dos q-bits no chip



Fonte: Santos (2017)

é mostrada na Figura 18.

Figura 18 – Interface de edição do IBM Q-experience



Fonte: IBM (2018)

Nesta interface, temos a opção de criar um novo projeto (*New*) e salvar um projeto (*Save* ou *Save As*). Após construir um circuito, temos a opção de simular (*Simulate*) ou executar (*Run*) um circuito. Na opção de simular, a plataforma verifica se o circuito possui algum erro e retorna os resultados esperados. Já na opção de executar, o circuito é submetido no sistema da IBM para ser implementado em um chip quântico. Caso este circuito já tenha sido implementado anteriormente, o sistema disponibiliza a opção de usar os resultados de uma execução já realizada. Caso o usuário escolha realmente executar, o projeto será submetido ao *time* da IBM e possivelmente entrará em uma fila de espera até

ser implementado.

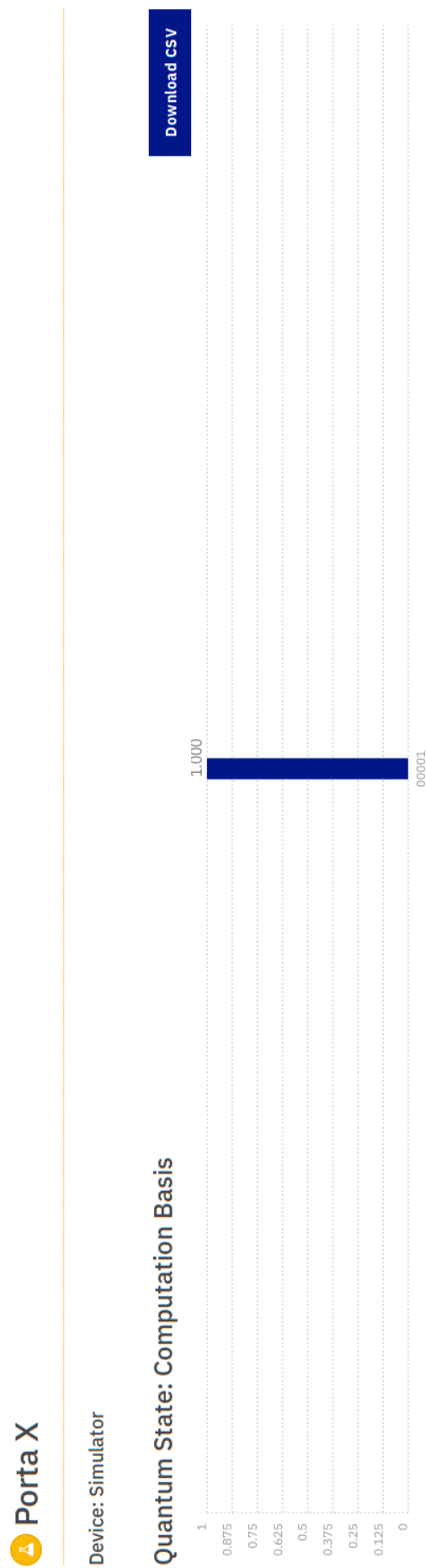
No lado direito do sistema mostrado na [Figura 18](#) temos algumas portas lógicas representadas por blocos. Já do lado esquerdo temos as representações dos bits quânticos, onde colocamos as portas lógicas para implementar o circuito. Para aplicar uma porta a um  $q$ -bit, basta arrastar a porta desejada até o  $q$ -bit em que se deseja fazer a operação. Para exemplificar, vamos implementar um circuito que inverte o estado de um  $q$ -bit. Esse circuito é apresentado na [Figura 19](#). Observe que ao final do  $q$ -bit a ser medido temos uma porta que realiza a leitura do estado desse  $q$ -bit. Agora, podemos simular este circuito para verificar se o mesmo está correto ou se precisa de alguma alteração. O resultado da simulação é apresentado na [Figura 20](#). Após realizar a simulação podemos realmente executar esse circuito no computador quântico. Até a data de conclusão deste trabalho o sistema da IBM estava em manutenção, então vamos selecionar a opção de usar os resultados de uma execução já realizada. Nesse caso, o resultado da execução é apresentado na [Figura 21](#). Como podemos ver, o resultado da execução real é diferente de uma simulação. Na simulação, o resultado é sempre 100% de acerto no  $q$ -bit  $|1\rangle$ . Já na execução real, como temos uma probabilidade de termos o resultado correto, então, 86,3% dos casos deram  $|1\rangle$  e 13,7% deram  $|0\rangle$ .

Figura 19 – Porta X no IBM Q-experience



Fonte: [IBM \(2018\)](#)

Figura 20 – Resultado da simulação da porta X no IBM Q-experience



Fonte: IBM (2018)

Figura 21 – Resultado da execução da porta X no IBM Q-experience



Device: ibmqx4

### Quantum State: Computation Basis

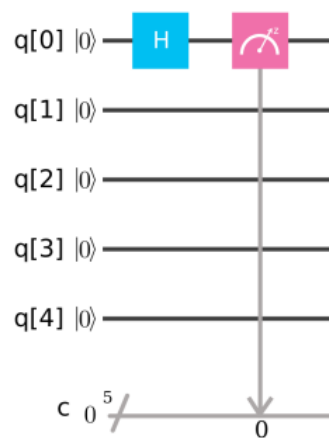


Fonte: IBM (2018)

## 7.1 Exemplo: Porta de Hadamard

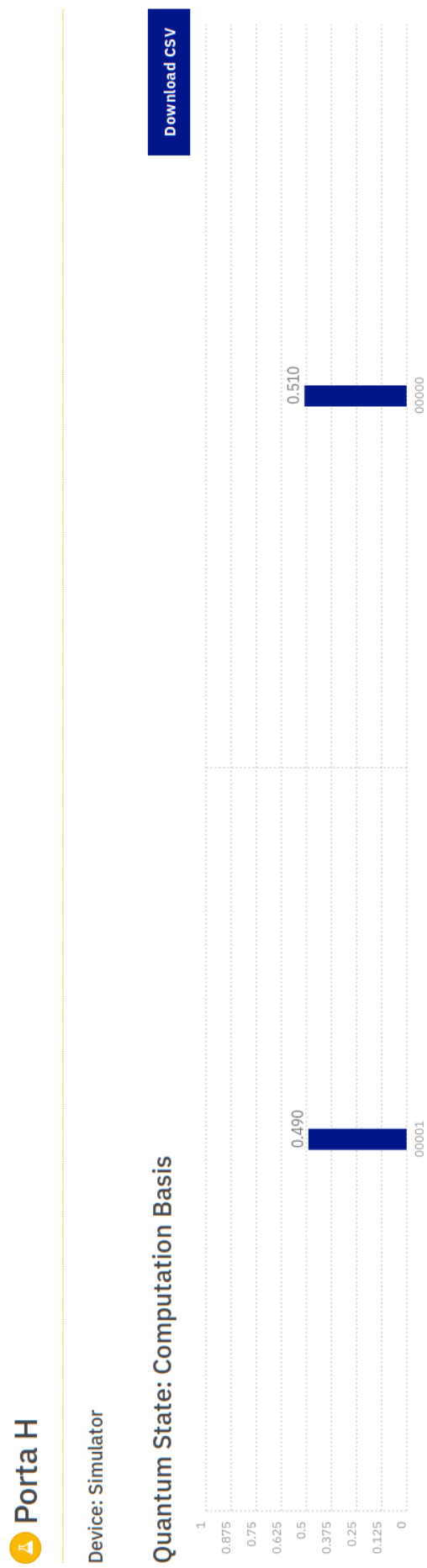
Outro exemplo bem interessante de se visualizar é a Porta de Hadamard. Como vimos, esta porta transforma um  $q$ -bit, por exemplo  $|0\rangle$  em uma sobreposição de  $q$ -bits:  $H|0\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ . O circuito contendo a implementação da Porta de Hadamard é mostrado na [Figura 22](#). Assim como no circuito anterior, vamos simular e executar o circuito. Os resultados podem ser vistos nas Figuras [23](#) e [24](#), respectivamente. Veja que, assim como na teoria, a execução prevê cerca de 50% de chance de se encontrar o  $q$ -bit  $|0\rangle$  e 50% de se encontrar o  $q$ -bit  $|1\rangle$ .

Figura 22 – Porta H no IBM Q-experience



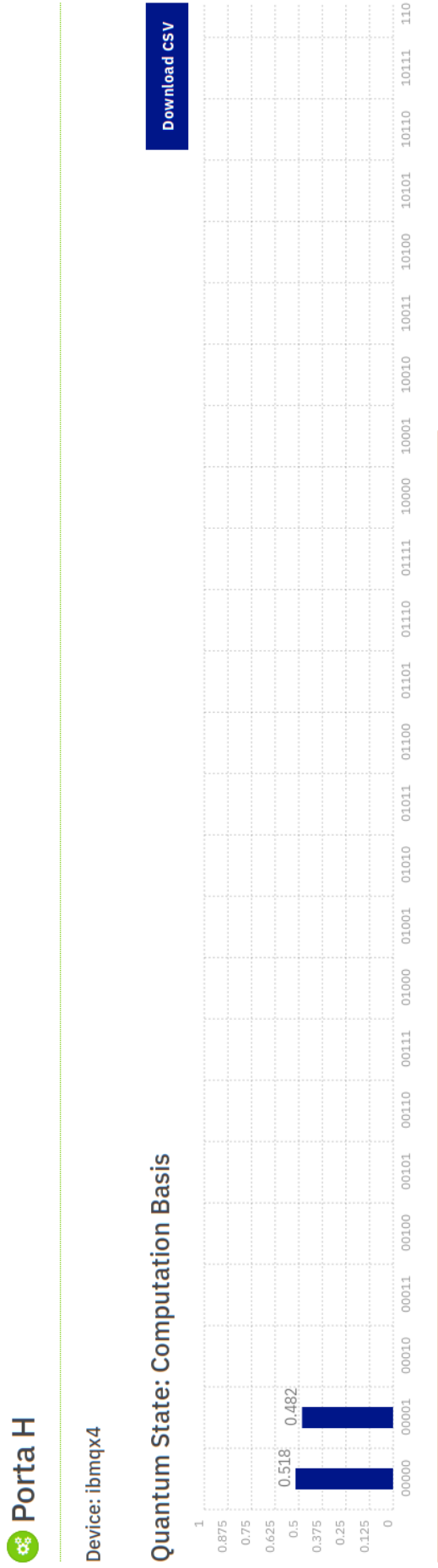
Fonte: [IBM \(2018\)](#)

Figura 23 – Resultado da simulação da porta H no IBM Q-experience



Fonte: IBM (2018)

Figura 24 – Resultado da execução da porta H no IBM Q-experience



Fonte: IBM (2018)



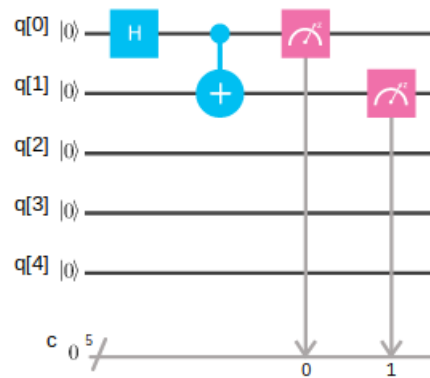
## 7.2 Exemplo: codificação suspensa

Neste exemplo vamos implementar um circuito que simula a Codificação Suspensa. Para isso, primeiro temos que criar um estado de Bell que será compartilhado com Alice e Bob. Vamos supor que o estado compartilhado seja o mesmo que usamos como exemplo na seção de codificação suspensa

$$|\Psi^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (7.1)$$

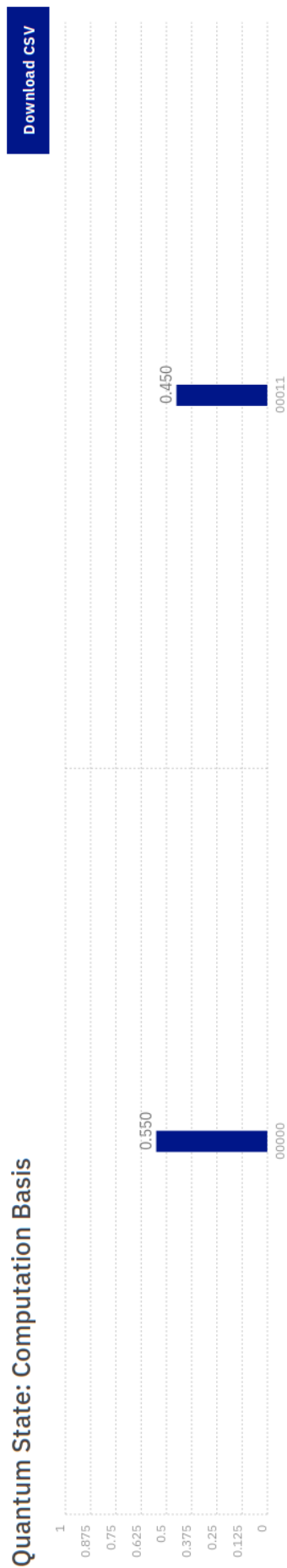
Para criar este estado vamos usar o circuito apresentado na [Figura 25](#). Após simularmos esse circuito, obtemos o resultado apresentado na [Figura 26](#).

Figura 25 – Primeira parte do circuito de codificação suspensa



Fonte: [IBM \(2018\)](#)

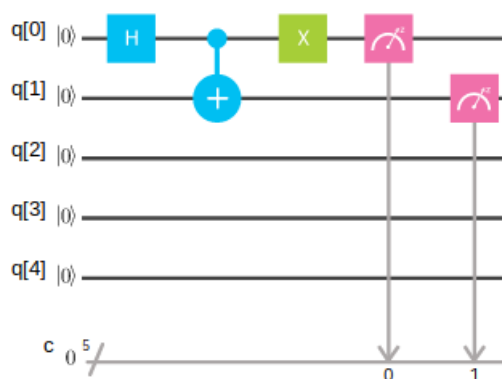
Figura 26 – Resultado da simulação da primeira parte do circuito de codificação suspensa



Fonte: IBM (2018)

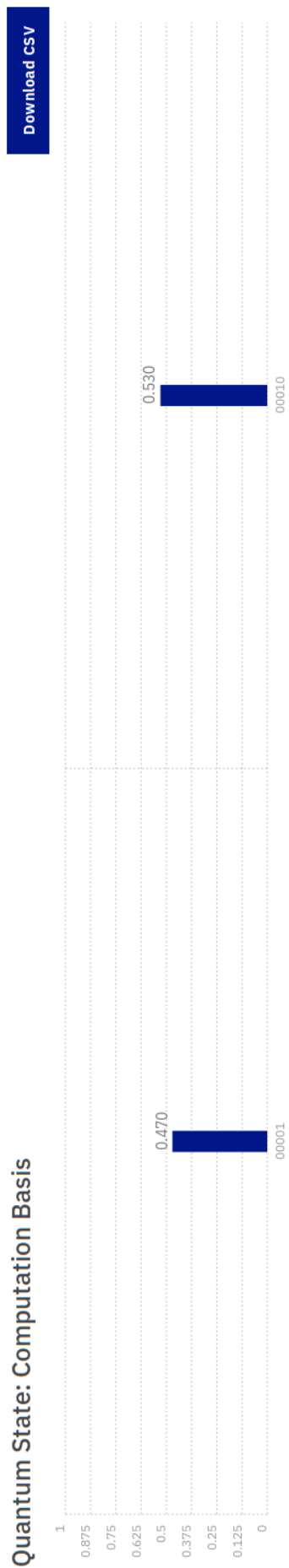
Agora, assim como no exemplo dado na [seção 6.2](#), vamos supor que Alice queira enviar a informação dada pelos *bits* 10, então ela tem que aplicar uma porta NOT no seu primeiro *q-bit*. Sendo assim o circuito ficará igual ao mostrado na [Figura 27](#) onde sua saída é apresentada na [Figura 28](#).

Figura 27 – Segunda parte do circuito de codificação suspensa



Fonte: IBM (2018)

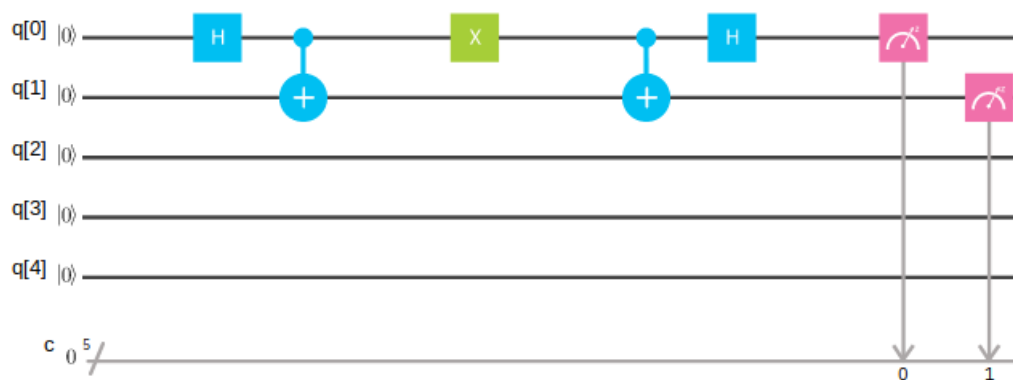
Figura 28 – Resultado da simulação da segunda parte do circuito de codificação suspensa



Fonte: IBM (2018)

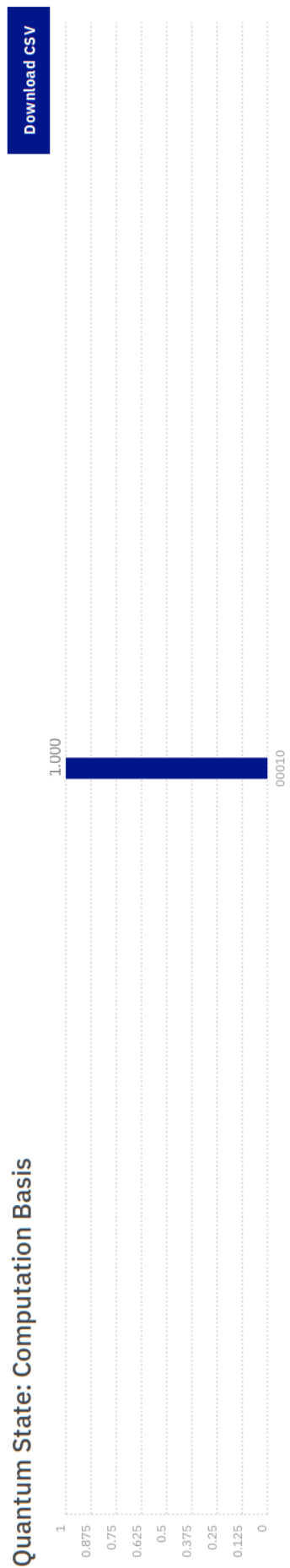
Agora, Alice envia o seu  $q$ -bit para Bob, que por sua vez aplica as operações  $CNOT$  e Hadamard e em seguida uma medida na base computacional. Agora, podemos completar o nosso circuito com essa etapa. A Figura 29 mostra o circuito completo, e a Figura 30 o resultado para esse circuito. Observe que o resultado encontrado na medição feita por Bob é o mesmo referente a informação clássica que Alice queria enviar a ele.

Figura 29 – Circuito de Codificação Suspensa



Fonte: IBM (2018)

Figura 30 – Resultado da simulação do circuito de Codificação Suspensa



Fonte: IBM (2018)

Após essas execuções, podemos perceber que esses gráficos nos dão uma distribuição de probabilidades de encontrarmos os estados possíveis. Podemos perceber, que no caso das simulações, os valores eram exatamente iguais aos encontrados na teoria. Já as execuções reais, não são exatamente as mesmas da teoria, tendo em vista que a computação quântica trabalha com probabilidades, então pode haver um erro, mesmo que pequeno nas execuções reais.

## 8 Conclusão

Este trabalho apresentou uma revisão bibliográfica básica sobre a Mecânica Quântica e a Computação Quântica. A Mecânica Quântica a anos vem se mostrando uma área cheia de conceitos e propriedades que são imprescindíveis para o entendimento do mundo e das tecnologias existentes. A Computação Quântica por sua vez, vem apresentando ser uma área muito promissora, propondo a fusão entre as ideias da mecânica quântica e da Ciência da Computação. Nota-se que projetos para a construção de computadores quânticos, mostraram-se possíveis, como é o caso dos computadores quânticos da Intel e IBM que já estão em funcionamento. Percebemos também que a adoção do paradigma quântico na computação trata-se de um trajeto natural, pois caminha concomitante com a diminuição dos dispositivos eletrônicos presentes no computador, como já previa a *Lei de Moore*. Vale destacar também que a computação quântica não é, como alguns podem erroneamente imaginar, mais uma dentre muitas tentativas de substituição de uma tecnologia em vias de esgotamento. Trata-se de um novo paradigma de computação, que pode ter profundas consequências, não só para a tecnologia, mas também para a teoria da informação, para a ciência da computação, e para a ciência em geral. Imaginamos que da mesma forma que a computação iniciada no século passado trouxe inúmeras aplicações que contribuíram para o desenvolvimento da humanidade nas mais variadas áreas, a computação quântica também propiciará aplicações que alcancem desde as viagens espaciais até a medicina, aumento assim a qualidade de vida das pessoas.

O estudo da computação quântica mostra-se de grande importância nos dias atuais. Isso se deve a capacidade dessa teoria revolucionar o mundo da computação. Tendo isso em mente, a pesquisa nesta área mostra-se de suma importância para o desenvolvimento das tecnologias atuais e futuras.

Como trabalhos futuros pretende-se investigar aspectos práticos da computação quântica, por exemplo, as diversas técnicas que existem para representar um  $q$ -bit fisicamente, como as portas são implementadas e como realizar a medição de um  $q$ -bit. Outra área interessante para pesquisa é a utilização dos preceitos da computação quântica para a inteligência Artificial, que hoje em dia também é uma área muito promissora. Podemos citar mais especificamente as redes neurais artificiais quânticas, que já vem sendo estudadas por diversos cientistas da área.



## Referências

- AMOREIRA, L. J. M. *Alguns algoritmos para computação quântica*. Covilhã, Portugal: UBI-DF, n.d. Citado 5 vezes nas páginas 44, 49, 50, 53 e 54.
- BARATA, J. ao C. A. *Noções Básicas Sobre Espaços de Hilbert*. [S.l.]: USP, 2018. Citado na página 55.
- BARBOSA, A. de A. *Introdução a Circuitos Quânticos*. Campina Grande, PB: UFCG, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 37, 39, 43, 45 e 46.
- BULNES, J. J. D. *Emaranhamento e Separabilidade de Estados em Computação Quântica por Ressonância Magnética Nuclear*. Rio de Janeiro, RJ: CBPF, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 56, 57 e 59.
- CABRAL, G. E. M.; LIMA, A. F. de; JR., B. L. *Interpretando o algoritmo de Deutsch no interferômetro de Mach-Zehnder*. [S.l.: s.n.], 2004. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 53.
- ECCHER, J. *Forma trigonométrica ou polar de um número complexo: Números complexos para o Enem*. Blog do Enem, n.d. Disponível em: <<https://exame.abril.com.br/ciencia/teletransporte-quantico-e-realizado-no-japao/>>. Citado na página 82.
- FIGUEIREDO, F. D. S. *Simulador de Circuitos Quânticos*. Porto, Portugal: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2013. Citado na página 34.
- FLOQUET, S. et al. *Álgebras e a Descrição da Mecânica Quântica*. [S.l.]: Revista Brasileira de Ensino de Física, 2018. Citado na página 55.
- GALILEU. *Cientistas teletransportam partícula da Terra para o espaço pela primeira vez*. Revista Galileu, 2017. Disponível em: <<https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2017/07/cientistas-teletransportam-particula-da-terra-para-o-espaco-pela-primeira-vez.html>>. Citado na página 62.
- IBM. *IBM Quantum Experience*. [s.n.], 2018. Disponível em: <<https://quantumexperience.ng.bluemix.net/qx/editor>>. Citado 14 vezes nas páginas 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75 e 76.
- IFSC. *Circuitos Aritméticos*. Wiki do IFSC, 2018. Disponível em: <[https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/index.php/AULA\\_13\\_-\\_Eletr%C3%B4nica\\_Digital\\_1\\_-\\_Gradua%C3%A7%C3%A3o](https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/index.php/AULA_13_-_Eletr%C3%B4nica_Digital_1_-_Gradua%C3%A7%C3%A3o)>. Citado na página 47.
- JR., O. P. *Conceitos de Física Quântica*. [S.l.]: Livraria da Física, 2006. Citado na página 56.
- JÚNIOR, B. L.; LIMA, A. F. de. *Circuitos Quânticos*. Campina Grande, PB: UFCG, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 34, 47 e 48.
- JÚNIOR, B. L.; LIMA, A. F. de. *Uma Introdução à Computação Quântica*. Campina Grande, PB: UFCG, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

- KELLY, J. *A Preview of Bristlecone, Google's New Quantum Processor*. Google AI Blog, 2018. Disponível em: <<https://ai.googleblog.com/2018/03/a-preview-of-bristlecone-googles-new.html>>. Citado na página 14.
- MELO, B. L. M. de; CHRISTOFOLETTI, T. V. D. *Computação Quântica: Estado da Arte*. Florianópolis, SC: UFSC, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.
- MINETTO, R. *Computação Quântica*. Campinas, SP: Unicamp, 2005. Citado na página 14.
- MONDAINI, D. F. *A Universalidade do Produto Tensorial e o Teorema de Composicionamento de Coecke*. Rio de Janeiro, RJ: PUC, 2006. Citado na página 36.
- MOTTA, V. S.; CARVALHO, L. M.; MACULAN, N. *Esfera de Bloch: algumas propriedades*. [S.l.]: Sociedade de Matemática Aplicada e Computacional, n.d. Citado na página 34.
- OLIVEIRA, I. S. *Teletransporte com átomos*. [S.l.]: Ciência Hoje, 2004. Citado na página 34.
- OLIVEIRA, I. S. *Física moderna Para iniciados, interessados e aficionados*. [S.l.]: Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 17.
- OLIVEIRA, I. S. *Chips da IBM e Intel iniciam nova era na computação quântica*. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2018. Disponível em: <<https://portal.cbpf.br/pt-br/ultimas-noticias/dois-chips-quanticos-iniciam-nova-era-na-computacao-quantica>>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 63.
- OLIVEIRA, I. S.; SARTHOUR, R. S. *Computação Quântica e Informação Quântica*. Rio de Janeiro, RJ: Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 35, 55, 56 e 60.
- PINTO, R. P. *Portas Lógicas e Circuitos Digitais*. [S.l.: s.n.], 2007. Citado na página 37.
- PORTUGAL, R. et al. *Uma Introdução aos Algoritmos Quânticos*. Petrópolis, RJ: LNCC, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.
- REN, J.-G. et al. *Ground-to-satellite quantum teleportation*. [S.l.]: Cornell University, 2017. Citado na página 62.
- RIGOLIN, G. G. *Estados Quânticos Emaranhados*. Campinas, SP: UNICAMP, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 56.
- RODRIGUES, W. A. *O Computador Quântico Óptico*. Brasília, DF: Universidade Católica de Brasília, 2011. Citado na página 12.
- ROTHMAN, P. *Teletransporte quântico é realizado no Japão*. Exame, 2011. Disponível em: <<https://exame.abril.com.br/ciencia/teletransporte-quantico-e-realizado-no-japao/>>. Citado na página 62.
- SANTOS, A. C. *O computador Quântico da IBM e o IBM Quantum Experience*. Niterói, RJ: Revista Brasileira do Ensino de Física, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 35, 63 e 64.
- TEMPORAO, G. P. *Contagem de fótons no infravermelho próximo e médio via conversão de frequências aplicada a comunicações quânticas*. [S.l.]: PUC, 2007. Citado na página 35.

UNICAMP. *Análise Tensorial*. UNICAMP, n.d. Disponível em: <<http://www.fem.unicamp.br/~em421/semII-1999/textos/tensor.pdf>>. Citado na página 36.

YUGE, C. *Google traz detalhes sobre o Bristlecone, seu poderoso processador quântico*. Tecmundo, 2018. Disponível em: <<https://www.tecmundo.com.br/ciencia/127914-google-traz-detalhes-bristlecone-poderoso-processador-quantico.htm>>. Citado na página 14.

ZUBEN, F. J. V. *Computação Quântica*. Campinas, SP: Unicamp, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 55, 57, 60 e 61.

# APÊNDICE A – Números complexos

Um número complexo  $z$  é a soma de um número imaginário a um número real,

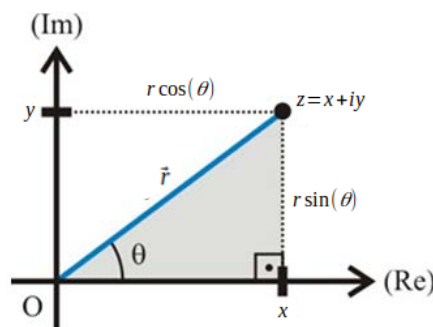
$$z = x + iy, \quad (\text{A.1})$$

em que as variáveis  $x$  e  $y$  são reais e  $i^2 = -1$ . Uma outra maneira para representá-lo é em coordenadas polares. Neste sistema de coordenadas,

$$z = r \cos(\theta) + ir \sin(\theta) = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)), \quad (\text{A.2})$$

e podemos representar um número complexo da maneira apresentada na [Figura 31](#). Observe

Figura 31 – Representação de um número complexo genérico na sua forma polar



Fonte: [Eccher](#) (n.d.)

que para uma rotação no plano complexo (*Diagrama de Argand*), devemos ter um arco  $S = |\vec{r}|\theta$  de tal forma que uma rotação infinitesimal de  $\vec{r}$  neste plano possa ser descrita sendo

$$ds = z d\theta. \quad (\text{A.3})$$

No fim das contas, isso corresponde a um vetor perpendicular a  $\vec{r}$  de magnitude  $z d\theta$ , o qual é somado a  $\vec{r}$ . Lembrando que estamos em coordenadas polares, essa soma tem magnitude

$$z + iz d\theta \quad (\text{A.4})$$

e podemos encarar o termo  $iz d\theta$  equivalente a uma variação infinitesimal  $dz$ . Daí,

$$1 + \frac{dz}{z} = 1 + id\theta \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{dz}{z} = id\theta. \quad (\text{A.6})$$

Se tomarmos uma rotação genérica  $z_0(\theta = 0) \rightarrow z_\theta(\theta)$ , podemos escrever

$$\int_{z_0}^{z_\theta} \frac{dz'}{z} = i \int_{\theta_0=0}^{\theta} d\theta' \quad (\text{A.7})$$

$$\ln\left(\frac{z_\theta}{z_0}\right) = i\theta \quad (\text{A.8})$$

$$z_\theta = e^{i\theta} z_0. \quad (\text{A.9})$$

Veja então que  $e^{i\theta}$  pode ser encarado como um operador no plano complexo que rotaciona um vetor  $z$  de um ângulo  $\theta$ . Por exemplo, tomando  $z_0$  com módulo unitário,

$$e^{i\theta} = z_\theta = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (\text{A.10})$$

que é a *Equação de Euler* (ou *Fórmula de Moivre*). Observe também que se  $\theta = \pi/2$ ,

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i, \quad (\text{A.11})$$

e portanto, pode ser encarado como um operador para a rotação de  $90^\circ$  no plano complexo, como mostra a [Figura 32](#).

Há ainda um outro formalismo no mundo dos números complexos que será valioso para nossas interpretações físicas. Cada número complexo tem um *complexo conjugado*,  $z^*$ , que nada mais é que o próprio número  $z$  com o sinal da parte imaginária invertido. Então, se

$$z = x + iy = re^{i\theta} \quad (\text{A.12})$$

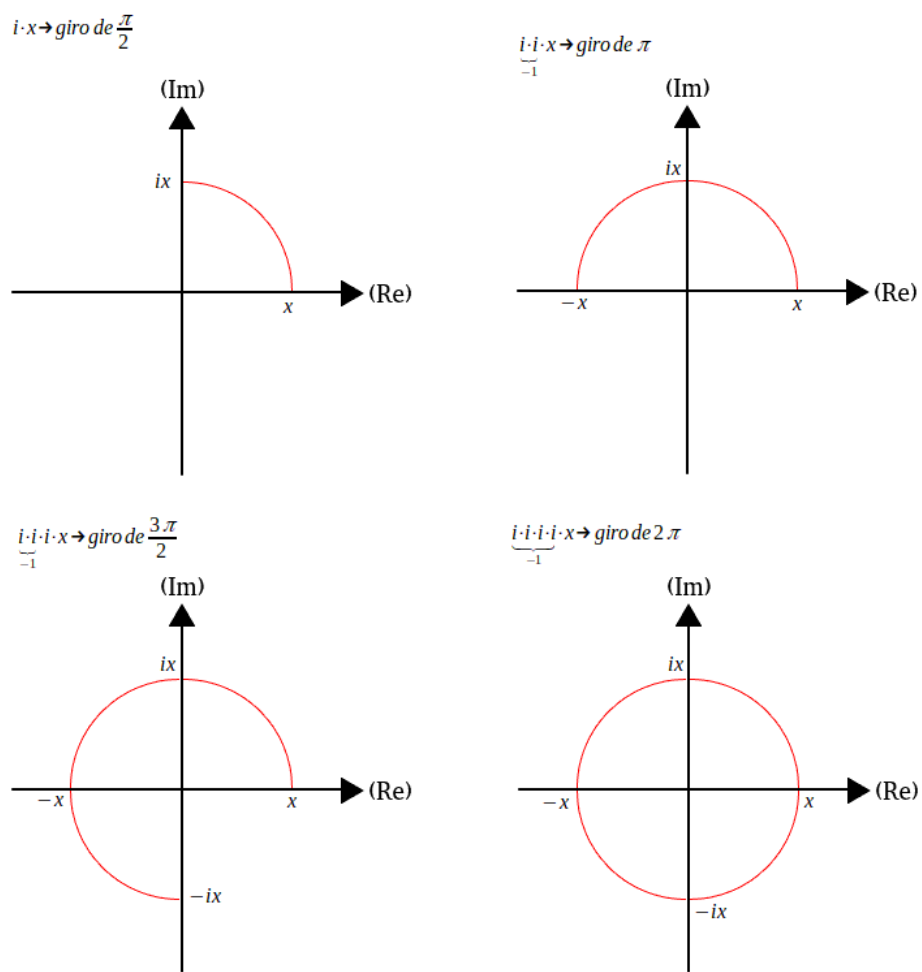
temos que

$$z^* = x - iy = re^{-i\theta}. \quad (\text{A.13})$$

Isso tem uma implicação imediata: multiplicando um número complexo pelo seu conjugado obtemos um resultado real e positivo,

$$z^* z = r^2. \quad (\text{A.14})$$

Figura 32 – Rotação no plano complexo



Fonte: o autor



UFOP  
Universidade Federal  
de Ouro Preto

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E APLICADAS  
COLEGIADO DO CURSO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO



## TERMO DE RESPONSABILIDADE

Eu, Paulo Sérvulo dos Santos, declaro que o texto do trabalho de conclusão de curso intitulado “*Q-bit: um novo fundamento lógico*” é de minha inteira responsabilidade e que não há utilização de texto, material fotográfico, código fonte de programa ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem as devidas referências ou consentimento dos respectivos autores.

João Monlevade, 19 de Dezembro de 2018

Paulo Sérvulo dos Santos

Assinatura do aluno



UFOP  
Universidade Federal  
de Ouro Preto


UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E APLICADAS  
COLEGIADO DO CURSO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO



## DECLARAÇÃO DE CONFORMIDADE

Certifico que o aluno Paulo Sérvulo dos Santos, autor do trabalho de conclusão de curso intitulado "Q-bit: Um novo fundamento lógico" efetuou as correções sugeridas pela banca examinadora e que estou de acordo com a versão final do trabalho.

João Monlevade, 21 de Janeiro de 2019.



Professor Orientador