



Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Departamento de Engenharia Elétrica



Trabalho de Conclusão de Curso

Análise de Estabilidade e Estabilização de MJLS Empregando Parâmetros Escalares e Diferença de Primeira Ordem dos Estados

Wendell Lírio Fiore

João Monlevade, MG
2018

Wendell Lírio Fiore

Análise de Estabilidade e Estabilização de MJLS Empregando Parâmetros Escalares e Diferença de Primeira Ordem dos Estados

Trabalho de Conclusão de curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Elétrica pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.
Orientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga

Universidade Federal de Ouro Preto
João Monlevade
2018

F518a Fiore, Wendell Lírio.
Análise de estabilidade e estabilização de MJLS empregando parâmetros
escalares e diferença de primeira ordem dos estados [manuscrito] / Wendell
Lírio Fiore. - 2019.

48f.: il.: graf.; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de
Ciências Exatas e Aplicadas. Departamento de Engenharia Elétrica.

1. Engenharia Elétrica. 2. Controle automático. 3. Controladores
programáveis. 4. Sistemas lineares. 5. Automação. I. Braga, Márcio Feliciano.
II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 681.5

Catálogo: ficha.sisbin@ufop.edu.br



ATA DE DEFESA

Aos 15 dias do mês de JANEIRO de 2019, às 14 horas, no bloco B deste instituto, foi realizada a defesa de monografia pelo (a) formando (a) WENDELL LÍRIO FIORE, sendo a comissão examinadora constituída pelos professores: MÁRCIO FELICIANO BRAGA, VÍCTOR COSTA DA SILVA CAMPOS E WENDY ERAS HERRERA.

O (a) candidato (a) apresentou a monografia intitulada: ANÁLISE DE ESTABILIDADE E ESTABILIZAÇÃO DE MISSIS EMPREGANDO PARÂMETROS ESCALARES E DIFERENÇA DE PRIMEIRA ORDEM DOS ESTADOS.

A comissão examinadora deliberou, por unanimidade, pela APROVAÇÃO do (a) candidato(a), com a nota média 8,6, de acordo com a tabela 1. Na forma regulamentar foi lavrada a presente ata que é assinada pelos membros da comissão examinadora e pelo (a) formando(a).

Tabela 1 – Notas de avaliação da banca examinadora

Banca Examinadora	Nota
<u>MÁRCIO FELICIANO BRAGA</u>	<u>8,6</u>
<u>VÍCTOR COSTA DA SILVA CAMPOS</u>	<u>8,4</u>
<u>WENDY ERAS HERRERA</u>	<u>8,5</u>
Média	8,6

João Monlevade, 15 de JANEIRO de 2019.

Márcio Feliciano Braga

Professor(a) Orientador(a)

Professor(a) Coorientador(a)

Wendell Lírio Fiore

Aluno(a)

Wendy Eras Herrera

Professor(a) Convidado(a)

Victor Costa da Silva Campos

Professor(a) Convidado(a)

Agradecimentos

A Deus que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida, não somente nestes anos como universitário, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes.

Ao Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga pela oportunidade e apoio na elaboração deste trabalho.

Especialmente, agradeço minha mãe Kátia, heroína que me deu apoio, incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço.

Ao meu pai Wendell que, apesar de todas as dificuldades me fortaleceu e apoiou, o que para mim foi muito importante.

Aos meus irmãos Luísa e Estevão, que nos momentos de minha ausência dedicados ao estudo superior, sempre fizeram entender que o futuro é feito a partir da constante dedicação no presente!

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

"Deixe o futuro dizer a verdade, e avaliar cada um de acordo com seus trabalhos e suas conquistas."

– Nikola Tesla

Resumo

A teoria de controle é parte fundamental do mundo contemporâneo, tendo em vista que muitas vezes deseja-se empregar controladores para gerenciar processos dinâmicos, apresentando um grande ganho nos quesitos de precisão, confiabilidade e complexidade. Portanto, existe sempre a procura por melhores abordagens que permitam verificar e melhorar a acurácia e robustez dos controles implementados. Normalmente, utiliza-se a modelagem clássica para sistemas lineares para aproximar as plantas presentes na atualidade. Contudo, sabe-se que os acontecimentos físicos e biológicos do mundo tendem a possuir comportamentos incertos e norteados por probabilidades. Em linhas gerais, sistemas dinâmicos estão sujeitos a variações repentinas como falhas técnicas, distúrbios naturais ou alteração do ponto de operação podem ocorrer, sendo necessária uma análise mais profunda para contornar as não linearidades dos sistemas. Desta forma, tais sistemas dinâmicos podem ser analisados sob a metodologia da teoria de sistemas sujeitos a saltos markovianos (MJLS, do inglês, *Markov Jump Linear Systems*), a qual trata a característica de incerteza e imprevisibilidade desses sistemas, observando as probabilidades de ocorrência dos parâmetros supracitados e a teoria de estabilidade de Lyapunov, a qual apresenta condições generalizadas e suficientes para assegurar a estabilidade de sistemas, tanto de sistemas discretos quanto contínuos. Portanto, ao decorrer deste trabalho, são apresentadas duas técnicas desenvolvidas para apresentar uma abordagem menos conservadora do que as encontradas na literatura para analisar e sintetizar controladores para sistemas dinâmicos sujeitos a saltos markovianos. A primeira técnica é resumida em um teorema que possui um parâmetro de folga ξ , que produz leis de controle dependente ou independentes de modo que são capazes de estabilizar MJLS, com a matriz de probabilidades de transição (MPT) precisamente conhecida ou incerta, conferindo menos rigidez na busca de soluções. A segunda técnica é baseada na expansão do número de estados utilizados na construção da matriz candidata de Lyapunov. Por meio dessa expansão, é esperada uma redução no conservadorismo na análise de estabilidade dos MJLS. Assim, como na primeira técnica, a MPT considerada pode ser precisamente conhecida ou com incertezas politópicas.

Palavras-chave: Sistemas lineares a saltos markovianos, Sistemas discretos no tempo, Incertezas politópicas, Funções de Lyapunov, Desigualdades Matriciais Lineares.

Abstract

Control theory is a fundamental part of the contemporary world, since it is often desired to employ controllers to manage dynamic processes, presenting great gains in precision, reliability and complexity. Therefore, there is always a search for better approaches to verify and improve the accuracy and robustness of the implemented controls. Typically, classical modeling is used for linear systems to approximate present-day plants. However, it is known that the world's physical and biological events tend to have uncertain and probability-driven behaviors. That is, dynamic systems are subject to sudden variations such as technical failures, natural disturbances and alteration of the operating point can occur and, therefore, a deeper analysis must be performed to circumvent the nonlinearities of the systems. In this way, such dynamic systems can be analyzed under the Markov Jump Linear Systems (MJLS) methodology, which treats the uncertainty and unpredictability characteristic of these systems, observing the probability of occurrence of the aforementioned parameters and Lyapunov stability theory, which presents generalized and sufficient conditions to ensure the stability of systems, both discrete and continuous systems. Therefore, in the course of this work, two techniques developed to present a less conservative approach than those found in the literature to analyze and synthesize controllers for dynamic systems subject to Markov jumps are presented. The first technique is summarized in a theorem that has a clearance parameter ξ , which produces dependent or independent control laws so that they are able to stabilize MJLS, with the known or uncertain uncertainty matrix (MPT), giving less rigidity in the search for solutions. The second technique is based on the expansion of the number of states used in the construction of the Lyapunov candidate matrix. By means of this expansion, a conservative reduction in the stability analysis of the MJLS is expected. Thus, as in the first technique, the MPT considered may be precisely known or with polytopic uncertainties.

Keywords: Markovian Jump Linear Systems, Time discrete systems, Polytopic uncertainties, Lyapunov functions, Linear Matrix Inequalities.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Cadeia de Markov com 3 estados.	7
Figura 2 – Valores de b em relação a ξ	17
Figura 3 – Valores de b em relação a ξ	18
Figura 4 – Processo de Markov.	19
Figura 5 – Comportamento temporal da 1ª variável de estado - Malha Aberta. . .	20
Figura 6 – Comportamento temporal da 2ª variável de estado - Malha Aberta. . .	20
Figura 7 – Comportamento temporal da 1ª variável de estado - Malha Fechada. .	21
Figura 8 – Comportamento temporal da 2ª variável de estado - Malha Fechada. .	21
Figura 9 – Processo de Markov.	29
Figura 10 – Comportamento temporal da 1ª variável de estado - Malha Aberta. . .	29
Figura 11 – Comportamento temporal da 2ª variável de estado - Malha Aberta. . .	29

Lista de tabelas

Tabela 1 – Comparação entre as condições.	16
---	----

Lista de Siglas

- LMI** Desigualdade Matricial Linear (do inglês, *Linear Matrix Inequality*)
- MJLS** Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos, (do inglês, *Markovian Jump Linear System*)
- MPT** Matriz de probabilidade de transição
- MSS** Estabilidade por Média Quadrática (do inglês, *Mean Square Stability*)

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	MJLS, LMIS, INCERTEZAS POLITÓPICAS E DIFERENCIAL SUPERIOR DE ESTADOS	5
2.1	Sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos — MJLS	5
2.2	Desigualdades Matriciais Lineares e estabilização de MJLS	7
2.2.1	Análise de Estabilidade e Estabilização de MJLS	9
2.3	Incertezas politópicas	10
2.4	Análise com diferencial superior	10
3	DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS DE NOVAS CONDIÇÕES	12
3.1	Nova abordagem de síntese de controladores para MJLS	12
3.1.1	Exemplos numéricos	15
3.2	Síntese de controladores para MJLS com probabilidades incertas . .	22
3.2.1	Exemplo numérico	22
4	CONDIÇÃO DE ANÁLISE UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV COM DIFERENÇA DE PRIMEIRA ORDEM	25
4.1	Exemplos numéricos	27
5	CONCLUSÃO	32
	REFERÊNCIAS	33

1 Introdução

Em 1874, o talentoso Andrey Andreyevich Markov se matriculou na Universidade de São Petersburgo e obteve seu diploma de bacharel em 1878, em 1880 seu mestrado e em 1884 seu doutorado. Precedendo os estudos de Markov, em 1887, o seu professor, Pafnuty Chebyshev, esboçou uma prova do teorema do limite central generalizado. Utilizando uma abordagem diferente, o estudante de Chebyshev, Aleksandr Lyapunov provou o teorema sob hipóteses enfraquecidas em 1901. Oito anos mais tarde, Markov conseguiu provar o resultado geral rigorosamente usando o método de Chebyshev. Enquanto trabalhava nesse problema, ele estendeu tanto a lei dos grandes números (afirma que a distribuição observada se aproxima da distribuição esperada com o aumento do tamanho da amostra) e o teorema do limite central para certas sequências de variáveis aleatórias dependentes, formando classes especiais, descrevendo as cadeias de Markov (BASHARIN *et al.*, 2004).

Caracterizando estas cadeias de Markov, se faz necessário introduzir o conceito de matriz de Markov, a qual possui em seus elementos as probabilidades de chaveamento entre dois estados, sabendo o estado antecessor. Isso significa que esse processo possui a propriedade de Markov, uma vez que a distribuição de probabilidade do próximo estado depende apenas do estado atual e não da sequência de eventos que precederam, somente do valor atual. Nesse trabalho, cada vértice da cadeia de Markov representa um possível modo de operação do MJLS, os quais são as possíveis matrizes de dinâmica que o sistema pode conter (GARCIA, 2008).

No ano de 1876, Lyapunov se formou com honras no terceiro ginásio. Então, ele ingressou na Universidade de São Petersburgo, onde conheceu Markov e assistiu as aulas de professores como Mendeleev, Chebyshev e Korkin. Por volta de 1890, Lyapunov publicou seu artigo denominado *‘Problème général de la stabilité du mouvement’*, no volume 17 dos Anais de Estudos Matemáticos da Princeton University Press. Nesse artigo, Lyapunov apresentou seus trabalhos introduzindo a chamada teoria de estabilidade de Lyapunov o qual estudava um sistema mecânico, analisando a equação de energia (PAKSHINA, 2017).

O estudo dessas teorias de controle para os sistemas discreto possuem grande relevância, tendo em vista que a maioria dos controladores são implementados digitalmente, sendo necessário trata-los no tempo discreto. Além disso, o presente trabalho possui objetivos bem definidos, os quais são apresentados na forma de duas contribuições principais, uma para análise de estabilidade e outra para síntese de controladores para MJLS. Para ambas, é esperado demonstrar novas técnicas para que esses dois processos sejam menos conservadores em comparação com definições encontradas na literatura atual.

Atualmente, o emprego de sistemas de controle é de suma importância, tendo em vista que as empresas buscam todos os dias uma maior padronização e confiabilidade, para produção de produtos de alta qualidade. Contudo, muitas vezes, as plantas possuem

comportamentos que podem ser sujeitos a mudanças repentinas no seu funcionamento, fazendo com que a aplicação da modelagem linear clássica não seja a mais indicada. Sendo assim, abordar tais problemas por meio de sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos (MJLS, do inglês *Markov Jump Linear System*), é uma saída viável, uma vez que ela produz melhores respostas para análise e síntese para os sistemas sujeitos a variações repentinas na dinâmica. Porém, ressalta-se novamente que, por serem modelados pela cadeia de Markov que, por sua vez, depende da matriz de probabilidades de transição (MPT), a qual pode ser muito difícil ou até mesmo impraticável determinar, aplica-se a teoria de Lyapunov associadas a desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*), para tornar possível o tratamento (GARCIA, 2008).

Sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos no caso discreto são representados por um conjunto de equações a diferenças que depende de um parâmetro variável, cuja evolução é gerenciada por processos probabilísticos, modelados por uma cadeia de Markov associada à matriz de probabilidades de transição que governa os saltos. Entretanto, alguns sistemas dinâmicos reais possuem certa complexidade que inviabiliza o conhecimento exato das probabilidades de transição, tornando a abordagem limitada. Então, pode-se associar a teoria probabilística dos MJLS com a teoria de estabilidade de Lyapunov, a fim de obter uma representatividade mais concisa que permita a análise do sistema (COSTA *et al.*, 2005).

Antes de implementar os controladores, é necessário verificar se os sistemas são estáveis e se o controle é realmente necessário. Para isso, deve-se estudar o problema de maneira física para que seja possível modelar a planta, bem como analisar seu comportamento em malha aberta e sua estabilidade. Se, por outro lado, o MJLS não for estável, é de interesse obter leis de controle que o estabilizam o sistema quando operando em malha fechada, a chamada síntese do controlador. Portanto, um dos objetivos principais do presente trabalho é desenvolver condições para análise e síntese de controladores para MJLS, empregando a teoria de estabilidade de Lyapunov e LMIs (GONÇALVES, 2009).

Ampliando o estudo da estabilidade e visando aumentar a flexibilidade na análise e síntese de controladores, deseja-se inserir incertezas na MPT, uma vez que pode ser muito difícil determinar exatamente os valores das probabilidades. Assim, tanto no Capítulo 3 quanto no Capítulo 4, a MPT incerta é descrita por meio da abordagem politópica permitindo apresentar novas técnicas para o estudo dos MJLS. Além disso, são elaborados controladores dependente e independentes de modo, o que confere maior abrangência aos resultados.

Deseja-se também empregar funções de Lyapunov compostas pela primeira diferença dos estados, permitindo uma redução no conservadorismo presente nas abordagens atuais, ampliando o leque de soluções possíveis. Como essa área do conhecimento envolve tecnologias e avanços constantes de interesse para as indústrias, acredita-se que o presente trabalho possa agregar novas possibilidades nos tratamentos desse tipo de problema, pro-

duzindo novas condições de estabilidade e estabilização de MJLS.

Em síntese, este trabalho de conclusão de curso fornece duas contribuições principais. A primeira é uma nova técnica para síntese de controladores dependente ou independentes de modo para MJLS com MPT precisamente conhecida ou incerta. Nessa técnica, emprega-se um parâmetro escalar de folga, que quando fixado, produz condições LMIs menos conservadoras. A segunda contribuição é apresentada na forma de uma metodologia que utiliza a inserção de mais um estado na função candidata de Lyapunov, na busca de soluções menos conservadoras na análise de estabilidade dos MJLS.

A estrutura deste trabalho e a descrição resumida de cada capítulo é apresentada a seguir.

Capítulo 1: Apresenta-se uma introdução ao assunto em geral, bem como um breve histórico das ferramentas que são utilizadas para análise e síntese de MJLS, teoria de estabilidade de Lyapunov e LMIs. Ainda relata a relevância, motivação e os objetivos.

Capítulo 2: Apresenta-se a revisão bibliográfica referente às teorias de MJLS, LMIs, incertezas politópicas e construção da matriz candidata de Lyapunov com a primeira diferença de estados, bem como a explicitação dos métodos de análise e síntese.

Capítulo 3: São apresentadas novas condições por meio de um teorema, que produz leis de controle dependente ou independentes de modo, em que a MPT pode ser precisamente conhecida ou incerta. Por meio de exemplos numéricos são obtidos resultados e comparados com condições existentes na literatura, verificando a superioridade da condição.

Capítulo 4: Aborda-se de maneira sistemática, uma nova metodologia de análise para os MJLS por meio da primeira diferença de ordem superior. Assim, como feito no Capítulo 3, permite-se que a MPT seja precisamente conhecida ou incerta.

Capítulo 5: Tem-se a conclusão do trabalho, em que são discutidos os resultados obtidos e as propostas de trabalhos futuros.

2 Sistemas Markovianos, Desigualdades Matriciais Lineares, Incertezas Politópicas e Diferencial Superior de Estados

No presente capítulo são abordados conceitos teóricos relacionados a caracterização de importantes conceitos, como por exemplo, apresentação dos MJLS, das condições de estabilidade para esses sistemas através de LMIs e das incertezas politópicas. Portanto, trata-se de um capítulo de revisão bibliográfica em que os conceitos básicos fundamentam as condições e resultados obtidos nos capítulos seguintes são apresentados. São definidos como os sistemas podem ser modelados e como verificar a estabilidade para os MJLS por meio da teoria de estabilidade de Lyapunov para o caso discreto.

Tais formulações exprimem metodologias que visam contornar a limitação que a modelagem clássica oferece, diante da inexistência de suporte a mudanças abruptas no comportamento do sistema. Esse entrave é observado quando sistemas dinâmicos e reais são passíveis de mudanças repentinas. Logo, uma estratégia é tratar as variações como possíveis estados de operação e a aleatoriedade a ser levada em conta é modelada como uma mudança, ou um salto, entre os diferentes modos de operação. Portanto, adota-se a caracterização do sistema como uma cadeia de Markov sujeita a chaveamentos entre seus modos de operação, os quais são regidos pela matriz de probabilidades de transição de Markov.

Para conferir maior flexibilidade na análise e síntese de controladores para os MJLS, são apresentados também os conceitos de incertezas politópicas e de diferencial superior de estados. Primeiramente, as incertezas são inseridas matriz de probabilidade de transição \mathbb{P} , uma vez que determinar precisamente tais valores tende a ser muito difícil. Por outro lado, a inserção de mais estados na matriz candidata de Lyapunov é uma tentativa de obter resultados menos conservadores na análise de MJLS.

2.1 Sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos — MJLS

Os MJLS são utilizados de uma forma cada vez mais frequente. Eles possuem presença maciça em projetos de engenharia, como pontes sujeitas a vibrações, indústrias de modo geral que possuem plantas susceptíveis a mudanças repentinas e sistemas de captação de energia, como nos casos de energia solar e eólica (COSTA *et al.*, 2005). Portanto, apresenta-se a definição da modelagem que é empregada para familiarização. É importante salientar que toda a abordagem foi feita para o caso de tempo discreto, uma vez que os controladores atuais são majoritariamente digitais (COSTA *et al.*, 2005), além de ser o tipo de sistema estudado neste trabalho.

Primeiramente, considera-se uma sequência de variáveis aleatórias $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots)$ dependentes de um termo geral θ_k , em que o parâmetro k é um valor crescente e normalmente representa o tempo. Essa notação tem as características de um processo de Markov se qualquer cômputo para o próximo estado da sequência θ_{k+1} , conhecido os valores dos estados anteriores $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, depender apenas de θ_k . Em outras palavras, o valor seguinte de um dado estado depende apenas do estado atual e não dos futuros ou passados (GARCIA, 2008).

Define-se um MJLS como

$$x(k+1) = A(\theta_k)x(k) + B(\theta_k)u(k) \quad (2.1)$$

em que $x(k) \in \mathfrak{R}^{n_x}$ é o vetor de estados e $u(k) \in \mathfrak{R}^{n_u}$ representa o vetor de entradas do sistema. Tem-se que $A(\cdot)$ e $B(\cdot)$ são as matrizes da dinâmica e de entrada, respectivamente. Para efeito de simplificação na escrita, denota-se $A(\theta_k) \equiv A_i$ e $B(\theta_k) \equiv B_i$.

A sequência de estados em termos de probabilidades condicionais e a propriedade de Markov pode ser resumida por

$$Prob(\theta_{k+1} = j | \theta_k, \theta_{k-1}, \dots, \theta_1, \theta_0) = Prob(\theta_{k+1} = j | \theta_k = i). \quad (2.2)$$

Supondo que o sistema possua N estados possíveis, então pode-se definir o conjunto $K = \{1, 2, \dots, N\}$.

Nota-se que a simplificação em (2.2) é possível apenas pelo fato de a cadeia de Markov possuir uma probabilidade de chaveamento para outro estado no próximo instante dependente apenas do instante atual. Ou seja, os instantes anteriores ao k são nulos e a cadeia de Markov para o estado futuro é dependente apenas do estado atual da variável aleatória, definidas pela matriz de probabilidades de transição \mathbb{P} (GARCIA, 2008).

Na Figura 1, mostra-se um exemplo de cadeia de Markov com 3 estados representados pelos seus vértices e as probabilidades de transição são os pesos de cada aresta, os quais estão relacionados à cadeia de Markov, por meio da seguinte matriz de probabilidades de transição

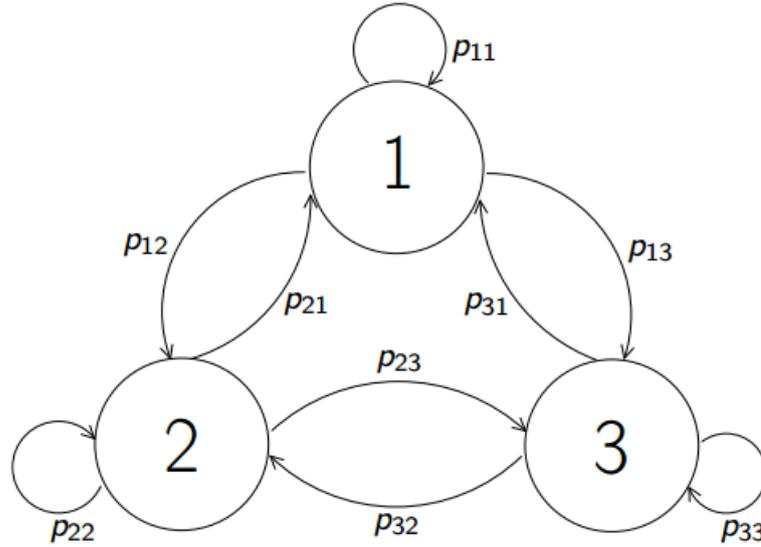
$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Tratando-se especificamente da matriz de Markov, observa-se que a soma das probabilidades nas arestas (ou linhas da matriz) que saem de cada estado deve contabilizar 1, uma vez que ou o estado necessariamente continua nele mesmo ou comuta para outro. Portanto, tem-se que

$$\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1,$$

sendo que as probabilidades de transição não podem ser negativas.

Figura 1 – Cadeia de Markov com 3 estados.



Fonte: Gonçalves (2009)

No decorrer deste trabalho, utiliza-se o conceito de Estabilidade por Média Quadrática (MSS, do inglês *Mean Square Stability*), que é aplicada à análise de estabilidade dos MJLS, para assegurar a estabilidade assintótica do MJLS.

Definição 2.1. A MSS assegura que $\mathcal{E}[||x(k)||] \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, $\forall x_0 \in \mathfrak{R}^{n_x}$, $\theta_0 \in K$.

A prova da condição pode ser encontrada em Costa *et al.* (2005).

2.2 Desigualdades Matriciais Lineares e estabilização de MJLS

Como introduzido no Capítulo 1, pode-se associar a teoria de estabilidade de Lyapunov aos MJLS a fim de obter uma maneira viável de resolver os problemas levantados. A técnica de empregar LMIs é de suma importância, tendo em vista que essa metodologia é capaz de ser mais abrangente no que se refere a obter soluções para as restrições. O fato de possuírem desigualdades ao invés de igualdades é responsável por ampliar a gama de soluções, uma vez que encontrar respostas únicas é normalmente mais restritivo. A seguir, tem-se uma abordagem da teoria para o caso de tempo discreto.

Para criar sua teoria sobre estabilidade assintótica, Lyapunov estudava o equilíbrio de sistemas mecânicos e fez algumas ponderações acerca da energia do caso. Então, considerando que a energia do sistema seja dada por uma função $V(x)$, observa-se que para o sistema ser estável, a energia deve ser positiva, ou seja, o sistema deve receber energia do meio e não fornecer, em que $V(x) > 0, \forall x \neq 0$. A segunda afirmação feita por

Lyapunov é que, para o sistema ser assintoticamente estável, a energia deve tender a zero quando o tempo tende ao infinito (VAL *et al.*, 2001).

Considere um sistema discreto linear autônomo definido como

$$x(k+1) = Ax(k). \quad (2.4)$$

Aplicando as condições impostas por Lyapunov, tem-se que o sistema definido em (2.4) é estável se, e somente se, as seguintes LMIs forem satisfeitas

$$V(x(k)) = x(k)'Px(k) > 0, \quad \forall x \neq 0 \quad \longleftrightarrow \quad P > 0. \quad (2.5)$$

Aplicando-se (2.5) no diferencial de primeira ordem, observa-se que

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) - v(x(k)) &= x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k) \\ &= x(k)'(A'PA - P)x(k) < 0 \quad \longleftrightarrow \quad A'PA - P < 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Portanto, segundo a teoria de estabilidade de Lyapunov, para determinar se o sistema (2.4) é estável, basta procurar uma solução factível $P = P'$ que satisfaça as LMIs

$$P > 0, \quad (2.7)$$

$$A'PA - P < 0. \quad (2.8)$$

Para manipulações futuras é importante definir o Complemento de Schur.

Definição 2.2. *Considerando uma matriz quadrada simétrica X particionada*

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

em que A, B e C são submatrizes da matriz X . Se $\det(A) \neq 0$, a matriz $C - B'A^{-1}B$ é o Complemento de Schur de X em relação a A . Além disso, $X > 0$ se e somente se $A > 0$ e $C - B'A^{-1}B > 0$.

Para o desenvolvimento das condições propostas neste trabalho, apresenta-se o Lema da Projecção.

Lema 2.1 (Boyd *et al.* (1994)). *Dada uma matriz simétrica $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e duas matrizes U e V , ambas com n colunas, existe uma matriz não estruturada G que assegura a seguinte desigualdade*

$$U'GV + V'G'U + Q < 0, \quad (2.10)$$

se, e somente se, as desigualdades de projecção referentes a G satisfizerem

$$N_U^T Q N_U < 0, \quad (2.11)$$

$$N_V^T Q N_V < 0, \quad (2.12)$$

em que N_U e N_V são bases para os espaços nulos das matrizes U e V , respectivamente.

2.2.1 Análise de Estabilidade e Estabilização de MJLS

Foi demonstrado primeiramente por Ji e Chizeck (1990) e ampliado por Costa e Fragoso (1993) que existe uma restrição necessária e suficiente para que o MJLS definido em (2.1) seja estável em média quadrática,

$$A_i' P_{pi} A_i - P_i < 0 \quad \forall i \in K, \quad (2.13)$$

em que $P_{pi} = \sum_{j=1}^N p_{ij} P_j$ com N sendo o número de modos de operação do MJLS.

A formulação é válida quando o sistema definido por (2.1) possuir entrada nula e é robustamente MSS se, somente se, existir matrizes $P_i = P_i' > 0$, $\forall i \in K$ com $P_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, tal que todas as restrições de Lyapunov sejam satisfeitas simultaneamente. Nota-se que se o MJLS possuir apenas um modo de operação, (2.13) recai em (2.8).

Então, reescrevendo (2.13) pelo Complemento de Schur, obtém-se

$$\begin{bmatrix} -P_i & A_i' \\ A_i & -P_{pi}^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (2.14)$$

Nota-se que (2.14) necessita da inversa da matriz P_{pi} . Como $P_{pi} = \sum_{j=1}^N p_{ij} P_j = (p_{i1} P_1 + p_{i2} P_2 + \dots + p_{iN} P_N)$ com $i = 1, 2, \dots, N$, tem-se que $P_{pi}^{-1} = (p_{i1} P_1 + p_{i2} P_2 + \dots + p_{iN} P_N)^{-1}$. Como a inversa depende de todos os P_i , o cômputo da inversa é não linear.

Então, para contornar tal problema, reescreve-se (2.13) da seguinte forma

$$A_i' P_{pi} P_{pi}^{-1} P_{pi} A_i - P_i < 0. \quad (2.15)$$

Em seguida, aplicando-se o Complemento de Schur em (2.15), tem-se

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i' P_{pi} \\ P_{pi} A_i & P_{pi} \end{bmatrix} > 0. \quad (2.16)$$

É objetivo do presente trabalho desenvolver controladores robustos via realimentação de estados para estabilizar MJLS. Então, define-se que o sistema (2.1) possa ter uma lei de controle da forma

$$u(k) = K_i x(k). \quad (2.17)$$

Em seguida, aplicando (2.17) em (2.1), tem-se

$$x(k+1) = A_i x(k) + B_i K_i x(k) \quad (2.18)$$

$$= A_{mf} x(k) \quad (2.19)$$

em que $A_{mf} = A_i + B_i K_i$ representa a matriz de estados do sistema em malha fechada.

Então, inserindo A_{mf} em (2.16), obtém-se

$$\begin{bmatrix} P_i & (A_i + B_i K_i)' P_{pi} \\ P_{pi} (A_i + B_i K_i) & P_{pi} \end{bmatrix} > 0. \quad (2.20)$$

Nota-se que as matrizes K_i e P_{pi} estão em lados diferentes nos termos, ou seja, a condição é não linear, uma vez que depende de duas variáveis multiplicadas. Portanto, é necessário aplicar técnicas de linearização que sejam capazes de contornar tal situação. Devido a isso, no capítulo seguinte apresenta-se uma nova estratégia de controle que permite sintetizar os ganhos K_i que estabilizem o sistema em malha fechada e provejam novas soluções para o problema.

2.3 Incertezas politópicas

Uma das grandes vantagens dessa abordagem de análise e síntese de controladores por LMIs, é a possibilidade de inserir incertezas em várias etapas do processo. É comum o projetista não saber ao certo qual a probabilidade de transição do evento ou como os estados se comportam exatamente, em que até os modos de operações dos MJLS podem possuir incertezas. Para tal, é necessário introduzir o conceito de incerteza politópica, a qual é responsável por conferir maior liberdade.

Essa metodologia é aplicada nos capítulos 3 e 4, os quais apresentam ferramentas para estudos dos MJLS. Portanto, além de técnicas que tendem a ser menos conservadoras, a inserção de incerteza colabora para uma análise mais flexível do processo. No presente trabalho, as incertezas foram inseridas apenas na matriz de probabilidades.

Definição 2.3. *Seja a matriz $\mathbb{P}(\alpha) \in \mathbb{K}$, a MPT com incertezas politópicas pertencente ao conjunto \mathbb{K} , têm-se que*

$$\mathbb{K} = [\mathbb{P}(\alpha) = \sum_{i=1}^V \alpha_i \mathbb{P}_i; \sum_{i=1}^V \alpha_i = 1; \alpha_i \geq 0] \quad (2.21)$$

em que V é o número de vértices do politopo \mathbb{K} e $i = 1, 2, \dots, V$.

2.4 Análise com diferencial superior

Nesta seção, introduzem-se os conceitos utilizados para os desenvolvimentos apresentados no Capítulo 4. Até o momento, as matrizes candidatas de Lyapunov são do tipo $V(x_k) = x_k' P_i x_k$, em que por simplicidade, o estado $x(k)$ é escrito como x_k . Contudo, foi desenvolvida uma nova metodologia que estende essa matriz para um diferencial superior de estados. Ou seja, como os MJLS são definidos por uma cadeia de Markov, são utilizados apenas dois estados, ao invés de um, uma vez que a probabilidade de transição entre seus modos de operação depende apenas do estado atual ou do anterior, o que justifica a escolha.

Para construção da condição de análise proposta, considere a definição a seguir

Definição 2.4. *Seja definida a matriz de Lyapunov como*

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{11i} & 0 \\ 0 & P_{22i} \end{bmatrix},$$

Então, a função candidata de Lyapunov é dada por

$$V(\bar{x}_k) = \bar{x}_k' P_i \bar{x}_k = \begin{bmatrix} x_k' & x_{k+1}' \end{bmatrix} P_i \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Assim, para que o MJLS seja assintoticamente estável, é necessário que as seguintes desigualdades sejam contempladas

$$V(\bar{x}_k) > 0, \quad (2.23)$$

$$\Delta V(\bar{x}_k) = V(\bar{x}_{k+1}) - V(\bar{x}_k) < 0. \quad (2.24)$$

3 Novas Condições de Estabilização de MJLS Empregando um Parâmetro Escalar

A estabilidade dos sistemas é uma característica vital para qualquer processo. Sem ela, qualquer outra característica, como de um bom desempenho por exemplo, não faz sentido. Por isso, o conceito de estabilidade é crucial na síntese de controladores realimentados, como o que é abordado neste capítulo. Contudo, a modelagem clássica não oferece suporte para análise de sistemas sujeitos a distúrbios externos e falhas gerais, os quais são a maioria das plantas reais.

Visando reduzir o conservadorismo na síntese de controladores para MJLS, nesse capítulo são apresentadas técnicas e definida uma formulação suficiente para encontrar uma lei de controle e garantir a estabilidade por realimentação de estados de um MJLS, garantindo uma maior abrangência na capacidade de sintetizar controladores.

Além de demonstrar as formulações necessárias, este capítulo discute também a questão da independência de modo. Como o MJLS é definido por vários modos de operação e o regime de operação dele permuta entre esses estados segundo a MPT, então é interessante que o controlador seja capaz de estabilizar o sistema independente do modo de operação em que se encontra. Por isso, neste capítulo também é mostrada como uma lei de controle independente de modo pode ser obtida.

3.1 Nova abordagem de síntese de controladores para MJLS

Como discutido no capítulo anterior, (2.20) é não linear, o que torna necessário uma transformação linearizante. Então, reescreve-se P_{pi} como

$$\begin{aligned}
 P_{pi} &= \sum_{j=1}^N p_{ij} P_j = p_{i1} P_1 + p_{i2} P_2 + \dots + p_{iN} P_N \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} p_{i1}^{-1} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{i2}^{-1} P_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{iN}^{-1} P_N \end{bmatrix}}_{diag^{-1} \Upsilon_i diag \bar{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{i1} I \\ p_{i2} I \\ \vdots \\ p_{iN} I \end{bmatrix}}_{\Upsilon_i}
 \end{aligned}$$

em que Υ_i é uma matriz coluna, cujos elementos são as probabilidades da MPT da linha analisada multiplicadas por uma matriz identidade e a operação $diag(W)$ cria uma matriz diagonal com os elementos da matriz genérica W na diagonal principal, com $\bar{P} = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_N]$ e $P_i^{-1} = X_i$.

O teorema a seguir apresenta condições LMIs suficientes com um parâmetro escalar, obtidas por meio do Lema da Projeção (Lema 2.1), para a existência de uma matriz de ganhos de realimentação de estados K_i , dependente de modo que assegura a MSS robusta do sistema (2.1)

Teorema 3.1. *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $X_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$ e matrizes $G_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$ e $Y_i \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_x}$, e um dado parâmetro escalar $\xi \in (-1, 1)$, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas para cada $i = 1, \dots, N$,*

$$\begin{bmatrix} X_i - G_i - G_i' & -\xi G_i \mathbb{I}' + (G_i' A_i' + Y_i' B_i') \Upsilon_i' \\ * & -\text{diag}(\Upsilon_i) \text{diag}(\bar{X}) + \xi \Upsilon_i (A_i G_i + B_i Y_i) \mathbb{I} + \xi \mathbb{I}' (G_i' A_i' + Y_i' B_i') \Upsilon_i' \end{bmatrix} < 0, \quad (3.1)$$

em que $\Upsilon_i = [p_{i1}I, p_{i2}I, \dots, p_{iN}I]^T$, $\bar{X} = [X_1, X_2, \dots, X_N]^T$, com $i = 1, \dots, N$, e $\mathbb{I} \in \mathfrak{R}^{n_x \times N n_x}$ é uma matriz composta pela concatenação de N matrizes identidade de tamanho n_x . Então, o sistema (2.1) é estabilizável por média quadrática por uma lei de controle dependente de modo $u(k) = K_i x(k) = Y_i G_i^{-1} x(k)$.

Prova: Utilizando a seguinte notação $\bar{A}_i = (A_i + B_i K_i)$ com $i = 1, \dots, N$, tem-se que (3.1) pode ser decomposta da seguinte forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X_i & 0 \\ 0 & -\text{diag}(\Upsilon_i) \text{diag}(\bar{X}) \end{bmatrix}}_Q + \underbrace{\begin{bmatrix} -I \\ \Upsilon_i \bar{A}_i \end{bmatrix}}_V G_i \underbrace{\begin{bmatrix} I & \xi \mathbb{I}' \end{bmatrix}}_V + \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ \xi \mathbb{I} \end{bmatrix}}_U G_i' \underbrace{\begin{bmatrix} -I & \bar{A}_i' \Upsilon_i' \end{bmatrix}}_U < 0. \quad (3.2)$$

Tal condição é equivalente, pelo Lema 2.1 (Lema da Projeção), a

$$N_U' Q N_U = \begin{bmatrix} \bar{A}_i' \Upsilon_i' \\ I \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X_i & 0 \\ 0 & -\text{diag}(\Upsilon_i) \text{diag}(\bar{X}_i) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{A}_i' \Upsilon_i' \\ I \end{bmatrix}}_{N_U} < 0, \quad (3.3)$$

$$N_V' Q N_V = \begin{bmatrix} -\xi \mathbb{I}' \\ I \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X_i & 0 \\ 0 & -\text{diag}(\Upsilon_i) \text{diag}(\bar{X}_i) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -\xi \mathbb{I}' \\ I \end{bmatrix}}_{N_V} < 0, \quad (3.4)$$

$\forall i \in 1, \dots, N$.

Note que (3.3) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_i \bar{A}_i X_i & -\text{diag}(\Upsilon_i) \text{diag}(\bar{X}_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_i' \Upsilon_i' \\ I \end{bmatrix} < 0,$$

ou,

$$\Upsilon_i \bar{A}_i X_i \bar{A}_i' \Upsilon_i' - \text{diag}(\Upsilon_i) \text{diag}(\bar{X}_i) < 0 \quad (3.5)$$

Abrindo o complemento de Schur em (3.5) com respeito a X_i , tem-se

$$\begin{bmatrix} -\text{diag}(\Upsilon_i)\text{diag}(\bar{X}_i) & \Upsilon_i\bar{A}_i \\ \bar{A}_i'\Upsilon_i' & -X_i^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.6)$$

Sabendo-se que $X_i^{-1} = P_i$ e que $(\text{diag}(\bar{X}_i))^{-1} = \text{diag}(\bar{P})$, tem-se,

$$-P_i + \bar{A}_i'\Upsilon_i'(\text{diag}(\Upsilon_i))^{-1}\text{diag}(\bar{P})\Upsilon_i\bar{A}_i < 0,$$

ou,

$$\bar{A}_i'P_{pi}\bar{A}_i - P_i < 0,$$

o que assegura a estabilidade do MJLS, como visto em (2.13).

A seguir, desenvolvendo (3.4), tem-se

$$\begin{bmatrix} -p_{i1}X_1 + \xi^2X_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_{i2}X_2 + \xi^2X_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -p_{iN}X_N + \xi^2X_i \end{bmatrix} < 0, \forall i \in N. \quad (3.7)$$

Com o intuito de obter um limitante par ao valor do parâmetro escalar ξ , pode-se empregar o seguinte procedimento. Como $X_i > 0, \forall i \in K$, e $p_{ij} > 0, \forall i, j \in K$, tem-se que uma condição suficiente para que (3.7) seja satisfeita é que cada elemento da diagonal principal seja definido negativo. Por isso, toma-se o traço de (3.7), $\forall i \in K$, e obtém-se o seguinte grupo de desigualdades

$$\begin{aligned} -p_{11}X_1 + \xi^2X_1 - p_{12}X_2 + \xi^2X_1 - \dots - p_{1N}X_N + \xi^2X_1 &< 0 \\ -p_{21}X_1 + \xi^2X_2 - p_{22}X_2 + \xi^2X_2 - \dots - p_{2N}X_N + \xi^2X_2 &< 0 \\ &\vdots \\ -p_{N1}X_1 + \xi^2X_N - p_{N2}X_2 + \xi^2X_N - \dots - p_{NN}X_N + \xi^2X_N &< 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Somando e reagrupando os termos de (3.8), pode-se escrever

$$\begin{aligned} -(p_{11} + p_{21} + \dots + p_{N1})X_1 + N\xi^2X_1 - (p_{12} + p_{22} + \dots + p_{N2})X_2 + N\xi^2X_2 \\ - (p_{1N} + p_{2N} + \dots + p_{NN})X_N + N\xi^2X_N < 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Como $X_1, X_2 \dots X_N$ são definidas positivas, então resta que para (3.9)

$$-p_{1i} - p_{2i} - \dots - p_{Ni} + N\xi^2 < 0 \quad \forall i \in K \quad (3.10)$$

ou ainda,

$$-\sqrt{\frac{p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{Ni}}{N}} < \xi < \sqrt{\frac{p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{Ni}}{N}} \quad \forall i \in K. \quad (3.11)$$

Finalmente, tem-se

$$-\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N P_{ij}}{N}} < \xi < \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N P_{ij}}{N}}, \quad \forall j \in K. \quad (3.12)$$

□

Observação 3.1. Como o somatório das linhas da \mathbb{P} é 1, então o caso mais genérico da MPT é quando todos os elementos de uma das colunas é igual a 1 e os demais elementos nulos. Assim, tem-se que os limites mais gerais para o valor de ξ , em (3.12), está limitado entre -1 e 1 , sendo esse o intervalo utilizado no Teorema 3.1.

Observação 3.2. Note que o parâmetro ξ representa um grau de liberdade na procura por soluções factíveis. A introdução do parâmetro viabiliza encontrar soluções para alguns sistemas que antes não eram factíveis, como mostrado posteriormente.

Note também que o desenvolvimento apresentado no Teorema 3.1 prevê o cômputo de ganhos dependentes de modo, ou seja, existe um ganho para cada modo de operação do MJLS. Por outro lado, se um ganho independente de modo, isto é, um único ganho para todos os modos de operação, for desejado, então o corolário a seguir pode ser empregado.

Corolário 3.1. Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $X_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$ e matrizes $G \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_x}$ e $Y \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_x}$, e dado um parâmetro $\xi \in (-1, 1)$, tais que as LMIs (3.1) sejam verificadas para cada $i = 1, \dots, N$, com $G_i = G$ e $Y_i = Y$. Então, o sistema (2.1) é estabilizável por média quadrática por uma lei de controle independente de modo $u(k) = Kx(k) = YG^{-1}x(k)$.

3.1.1 Exemplos numéricos

Exemplo 1: Considere um MJLS discreto com quatro modos de operação gerados aleatoriamente, cujas matrizes são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.6624 & 0.9396 & 0.8479 \\ 0.6678 & 0.6446 & 0.8197 \\ 0.7210 & 0.7156 & 0.4501 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.6378 & 0.2050 & 0.3668 \\ 0.3949 & 0.0963 & 0.2566 \\ 0.6072 & 0.9619 & 0.6886 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.4118 & 0.2662 & 0.2680 \\ 0.7589 & 0.7568 & 0.7147 \\ 0.9717 & 0.9821 & 0.3219 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0.8312 & 0.1329 & 0.9091 \\ 0.5140 & 0.4899 & 0.0147 \\ 0.6187 & 0.2736 & 0.1142 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.6233 & 0.3421 \\ 0.9920 & 0.0345 \\ 0.6432 & 0.4701 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.8024 & 0.7264 \\ 0.3270 & 0.5461 \\ 0.8653 & 0.9990 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0.0162 & 0.7971 \\ 0.4920 & 0.8251 \\ 0.4102 & 0.4045 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0.3638 & 0.8530 \\ 0.5307 & 0.4812 \\ 0.0553 & 0.3914 \end{bmatrix},$$

e a matriz de probabilidade de transição é dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.4704 & 0.3225 & 0.1295 & 0.0776 \\ 0.0792 & 0.2843 & 0.4723 & 0.1642 \\ 0.0218 & 0.3072 & 0.3378 & 0.3332 \\ 0.1032 & 0.2041 & 0.3661 & 0.3266 \end{bmatrix}.$$

O objetivo do exemplo é sintetizar uma lei de controle dependente de modo e verificar a quantidade de variáveis escalares (V), linhas de LMIs (L) e factibilidade. A Tabela 1 mostra a comparação entre o Teorema 1 e o método visto em Gonçalves *et al.* (2012).

Tabela 1 – Comparação entre as condições.

Método	Factibilidade	V	L
<i>Teo1</i> (GONÇALVES <i>et al.</i> , 2012)	sim	171	120
<i>Teo 3.1</i> $_{\xi=0}$	sim	84	60

Como pode ser visto na Tabela 1, o problema é factível para ambas condições. Contudo, as diferenças entre V e L são grandes, tendo em vista que no teorema de Gonçalves *et al.* (2012), o número de linhas de LMIs e a quantidade de variáveis escalares é duas vezes maior, em comparação com o Teorema 3.1.

Para os casos nos quais o sistema é precisamente conhecido, as condições do Teorema 1 em Gonçalves *et al.* (2012) e o Teorema 3.1 são necessárias e suficientes. Assim, para mostrar a superioridade da condição desenvolvida e que o Teorema 3.1 é menos restritivo, os exemplos a seguir utilizam controladores independentes de modo, pois nesse caso as condições são apenas suficientes.

Exemplo 2: Considere um MJLS discreto com três modos de operação gerados aleatoriamente, cujas matrizes são dadas por

$$A_1 = b \begin{bmatrix} 0.7857 & 0.3794 \\ 0.2574 & 0.4548 \end{bmatrix}, \quad A_2 = b \begin{bmatrix} 0.9784 & 0.7144 \\ 0.8593 & 0.5042 \end{bmatrix}, \quad A_3 = b \begin{bmatrix} 0.8027 & 0.9204 \\ 0.3936 & 0.8092 \end{bmatrix},$$

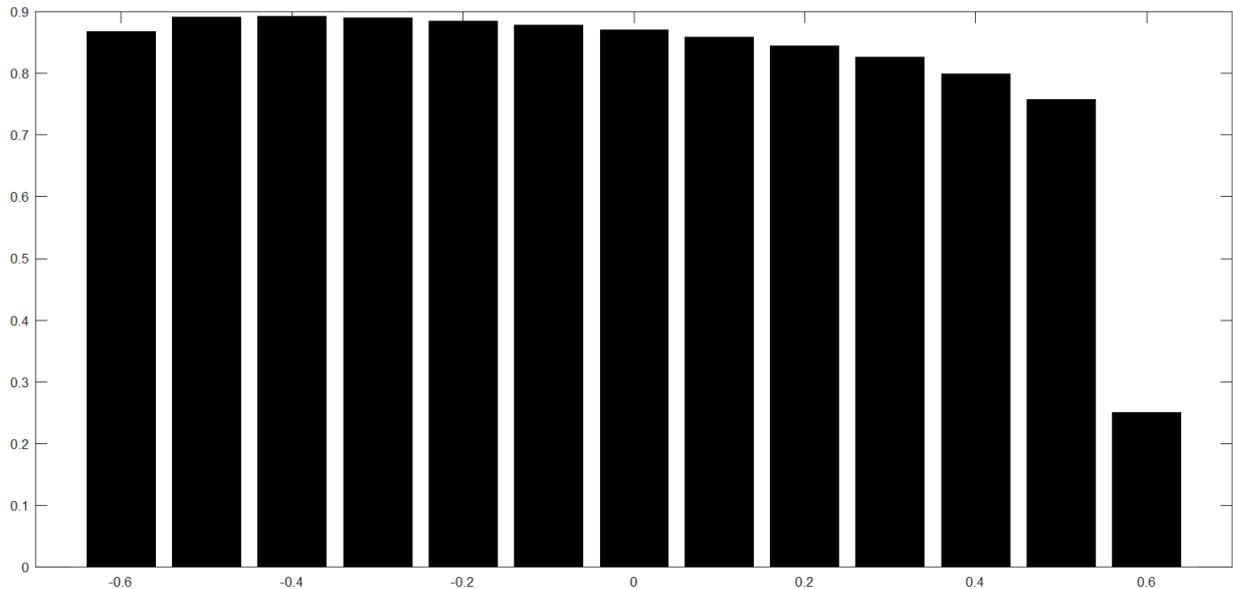
$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.7644 \\ 0.5028 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.6903 \\ 0.6049 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0.0196 \\ 0.0715 \end{bmatrix}$$

e matriz de probabilidade de transição

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,3603 & 0,4935 & 0,1462 \\ 0,2484 & 0,4037 & 0,3479 \\ 0,2589 & 0,0913 & 0,6498 \end{bmatrix}.$$

O objetivo é verificar quais são os máximos valores do parâmetro b para os quais a condição proposta apresenta soluções factíveis. No caso em que $\xi = 0$, tem-se o sistema sem atuação do parâmetro de folga, recaindo na condição vista em Gonçalves *et al.* (2012). Nesse caso, obteve-se um $b_{max} = 0.8697$. Por outro lado, para $\xi = -0.3$ no Teorema 3.1, obteve-se um $b_{max} = 0.8918$, o que retrata que, dependendo da escolha de ξ , é possível encontrar controladores para uma família maior de MJLS, como visto na Figura 2. Os valores de b_{max} foram obtidos pela técnica de bisseção, numa rotina desenvolvida no MATLAB.

Figura 2 – Valores de b em relação a ξ



Fonte: Do Autor

Exemplo 3: Considere um MJLS discreto com dois modos de operação gerados aleatoriamente, cujas matrizes são

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.32 & -0.40 \\ 0.80 & -0.80 \end{bmatrix}, \quad A_2 = b \begin{bmatrix} 0.08 & -0.26 \\ 0.80 & -1.12 \end{bmatrix},$$

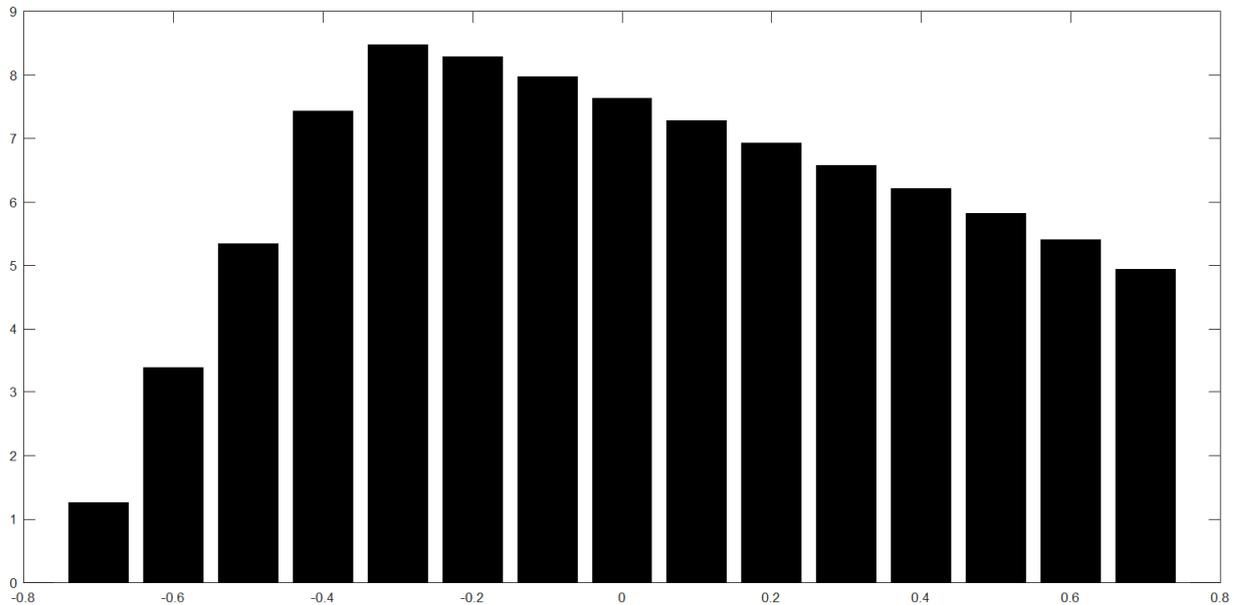
$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

em que b é um parâmetro escalar variável, e a matriz de probabilidade de transição é dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

O primeiro objetivo é verificar quais são os máximos valores do parâmetro b para os quais a condição proposta apresenta soluções factíveis. Pelo Teorema 3.1 com $\xi = 0$ obteve-se $b_{max} = 7.6295$. Para $\xi = -0.3$ encontrou-se $b_{max} = 8.4701$, o que retrata que, dependendo da escolha de ξ , é possível encontrar controladores para uma família maior de MJLS, como visto na Figura 3. Os valores de b_{max} foram obtidos pela técnica de bissecção, numa rotina desenvolvida no MATLAB.

Figura 3 – Valores de b em relação a ξ



Fonte: Do Autor

Escolhendo $b = 8.4701$, o sistema passa a ser definido por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.32 & -0.40 \\ 0.80 & -0.80 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.6776 & -2.2022 \\ 6.7761 & -9.4865 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

e matriz de probabilidade de transição

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

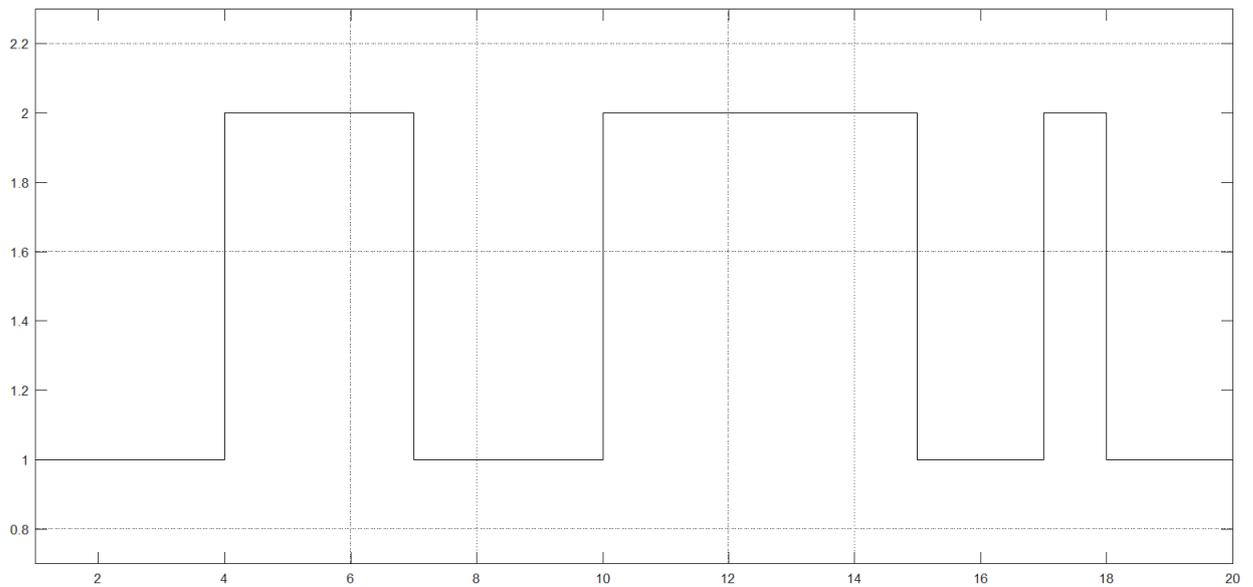
Tem-se que, para $\xi = 0$, o novo sistema não é estabilizável pelo Teo1 (GONÇALVES et al., 2012), assim como também não o é pelo Teorema 3.1, com $\xi = 0$. Por outro lado, escolhendo $\xi = -0.3$ no Teorema 3.1, obtém-se um controlador independente de modo

$$K = [3.4736 \quad 4.3411]. \quad (3.13)$$

Para verificar a eficiência do controle demonstrado no Teorema 3.1, são mostrados gráficos do processo de Markov, bem como o progresso temporal de cada uma das variáveis de estado, como feito em Boukas (2009). É importante frisar que foi utilizado o controle independente de modo. Para ambos os testes, em malha aberta e fechada, foi utilizado o mesmo processo de Markov e um $x_0 = [1 \quad -2]'$.

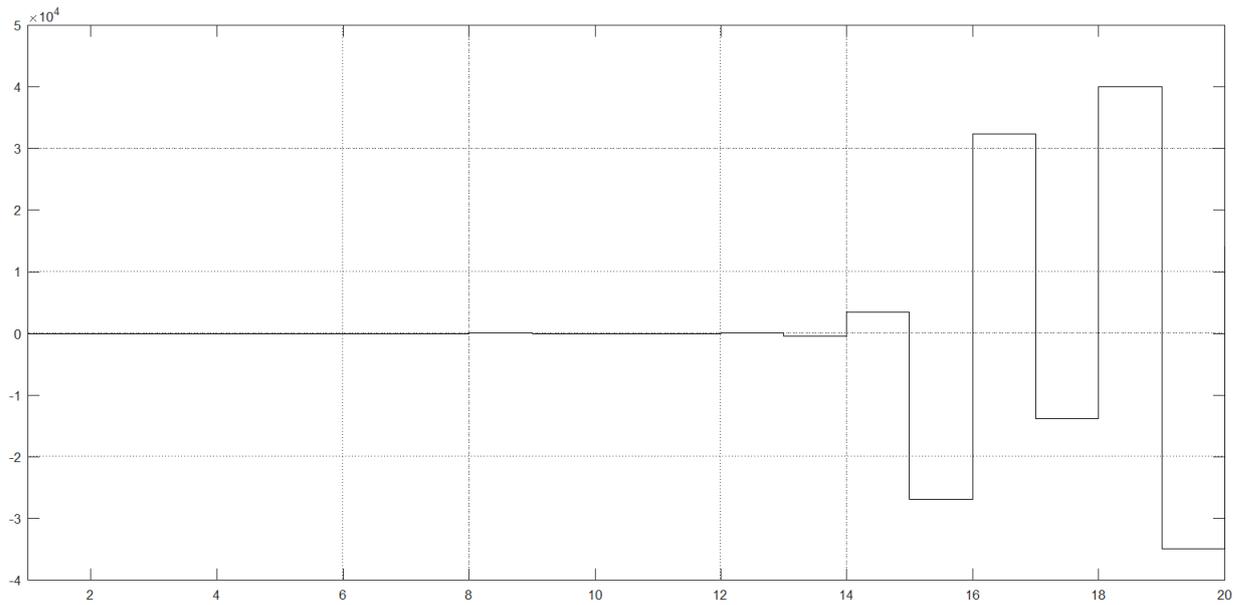
Na Figura 4, observa-se o chaveamento entre os modos de operação do MJLS. Nas Figuras 5 e 6, pode-se notar que as variáveis de estado são instáveis em malha aberta.

Figura 4 – Processo de Markov.



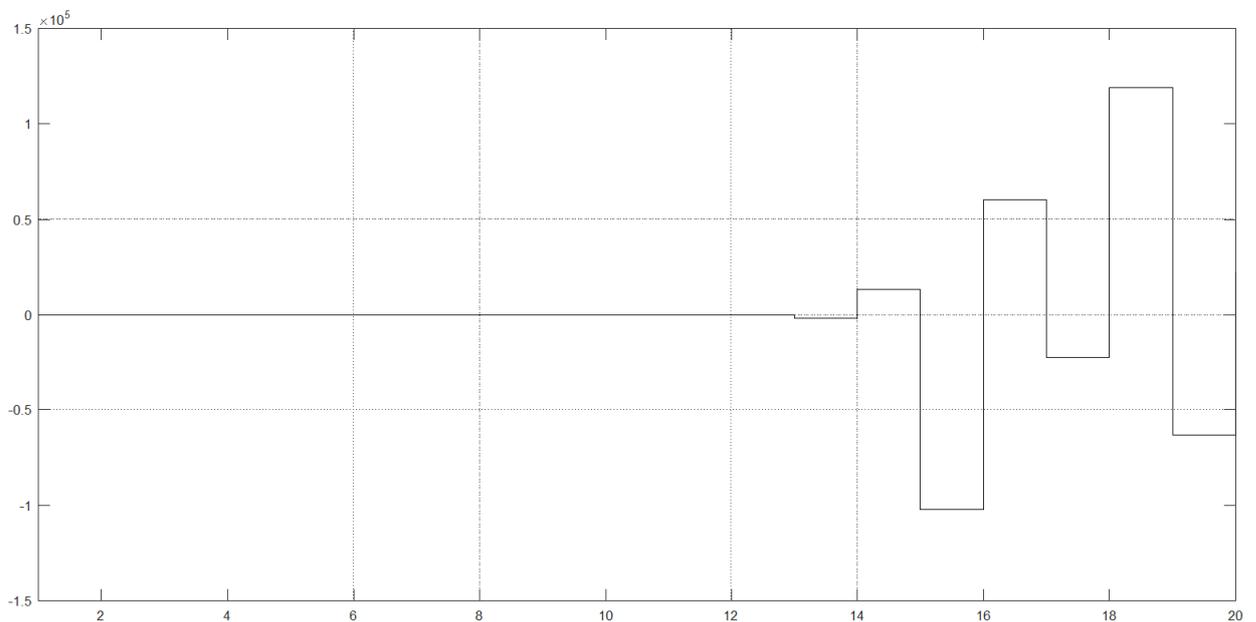
Fonte: Do Autor

Figura 5 – Comportamento temporal da 1ª variável de estado - Malha Aberta.



Fonte: Do Autor

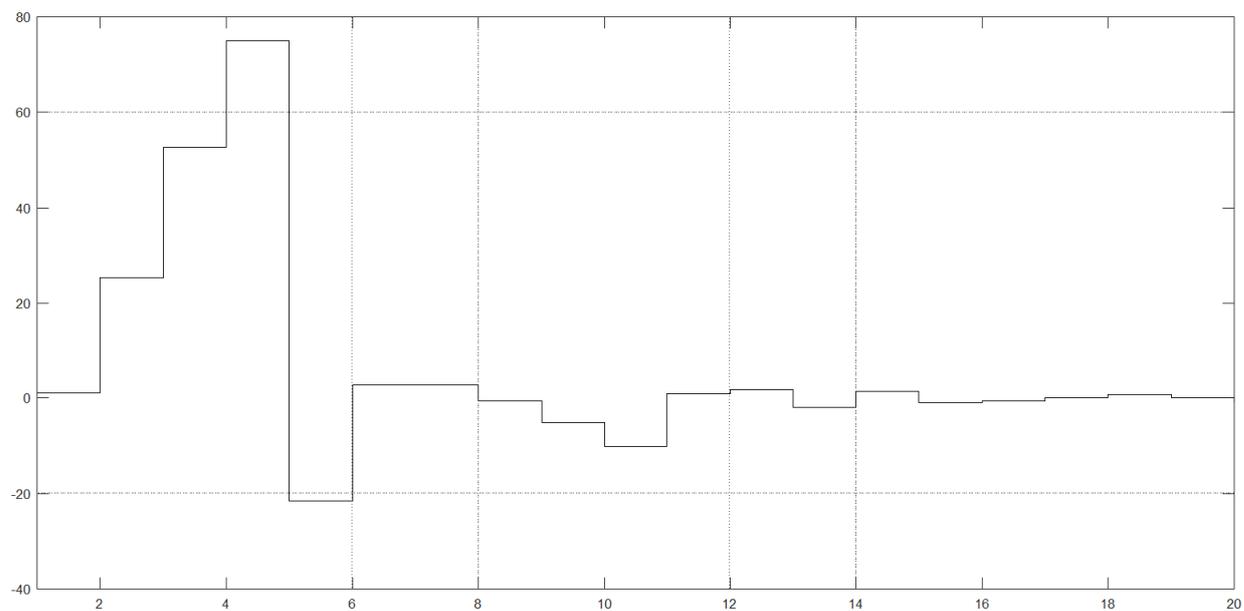
Figura 6 – Comportamento temporal da 2ª variável de estado - Malha Aberta.



Fonte: Do Autor

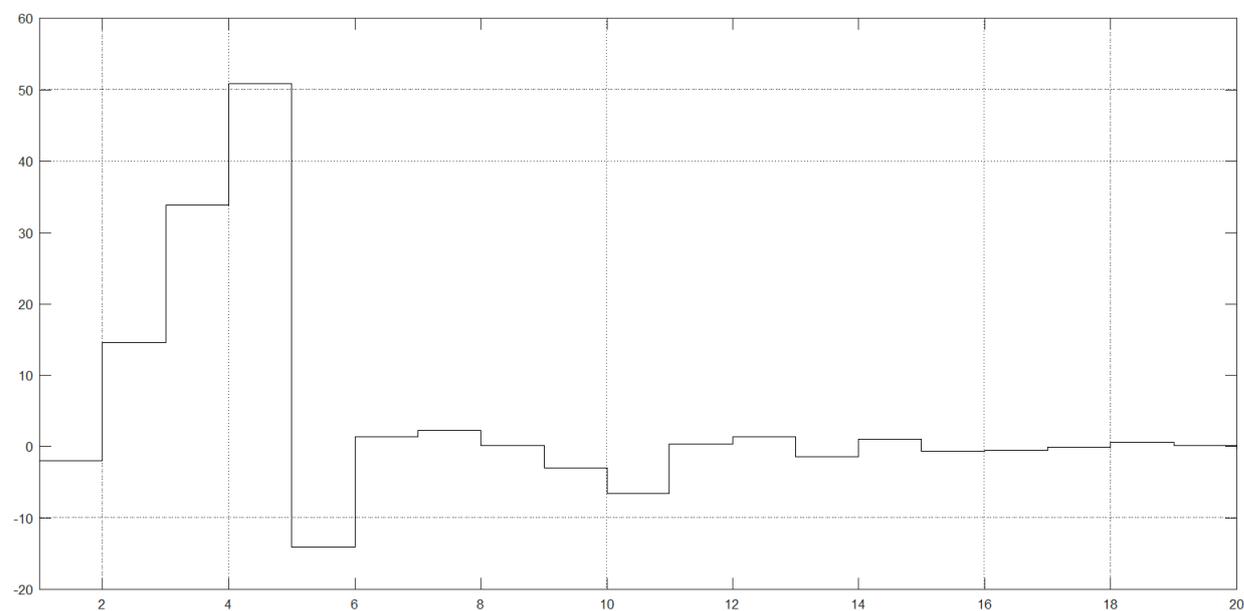
Por outro lado, empregando o controlador dado em (3.13) e o mesmo processo de Markov, o sistema é estabilizado como pode ser visto nas Figuras 7 e 8, mesmo com as sucessivas mudanças dos modos de operação do MJLS.

Figura 7 – Comportamento temporal da 1ª variável de estado - Malha Fechada.



Fonte: Do Autor

Figura 8 – Comportamento temporal da 2ª variável de estado - Malha Fechada.



Fonte: Do Autor

3.2 Síntese de controladores para MJLS com probabilidades incertas

Visando conferir maior flexibilidade para a síntese de controladores para MJLS, essa seção utiliza o Teorema 3.1 adaptado para incertezas politópicas. A única diferença é na construção da matriz P_{pi} , que passa a ser escrita como

$$P_{pi}(\alpha) = \sum_{j=1}^N \left[\sum_{k=1}^V \alpha_k (p_{ij})_k \right] P_j, \quad (3.14)$$

Então, é feito o mesmo processo de divisão da matriz. A diferença é que existe uma combinação para cada vértice da linha de análise da MPT. Em seguida, o Teorema 3.1 é aplicado para cada um dos vértices. Como o teorema utilizado é exatamente o mesmo, por simplicidade, ele não é apresentado, assim como a sua prova.

As seções a seguir mostraram os resultados numéricos obtidos com a aplicação dessa nova metodologia. Para criar os vértices dos politopos da MPT, foi criada uma rotina no MATLAB que utiliza uma função chamada '*Gamma_Multi_Simplex*', disponível em http://www.dt.fee.unicamp.br/~ricfow/programs/Gamma_alpha.pdf, desenvolvida pelos doutores Márcio Braga e Cecília Morais, a qual recebe uma célula com os limitantes da MPT e retorna todas as combinações possíveis de probabilidades que tenham soma unitária para cada linha. Ou seja, para cada linha da MPT, pode existir um número diferente de vértices, mas todos eles devem satisfazer ao Teorema 3.1.

3.2.1 Exemplo numérico

Exemplo 1: Considere um MJLS discreto com dois modos de operação gerados aleatoriamente, cujas matrizes são dadas por

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.32 & -0.40 \\ 0.80 & -0.80 \end{bmatrix}, & A_2 &= b \begin{bmatrix} 0.08 & -0.26 \\ 0.80 & -1.12 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

em que b é um parâmetro escalar variável. Dois casos são considerados. Em um primeiro momento, considera-se que a MPT é

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

No segundo caso, os elementos da matriz de probabilidade de transição são limitados podendo variar entre dois limitantes

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} [0.3 \ 0.65] & [0.45 \ 0.7] \\ [0.15 \ 0.5] & [0.6 \ 0.8] \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

O objetivo desse exemplo é analisar quais são os valores máximos que b pode assumir para que o sistema seja estabilizável, tanto para o caso da MPT precisamente conhecida, como para o caso incerto. Além disso, considera-se a síntese de controladores dependente e independentes de modo. Os valores de b_{max} foram obtidos pela técnica de bisseção, numa rotina desenvolvida no MATLAB, e são apresentados apenas os resultados do ξ com os melhores valores .

Caso 1: MPT precisamente conhecida:

- Para estratégia dependente de modo:

$$b_{max_{\xi=0}} = 20.6745,$$

$$b_{max_{\xi=-0.3}} = 24.3979.$$

- Para a técnica independente de modo:

$$b_{max_{\xi=0}} = 7.6295,$$

$$b_{max_{\xi=-0.3}} = 8.4701.$$

Caso 2: MPT incerta:

- Para estratégia dependente de modo:

$$b_{max_{\xi=0}} = 19.6745,$$

$$b_{max_{\xi=-0.2}} = 21.1865.$$

- Para a técnica independente de modo:

$$b_{max_{\xi=0}} = 7.1251,$$

$$b_{max_{\xi=-0.2}} = 7.7725.$$

Tanto para os testes realizados para os casos dependente e independentes de modo, o caso em que a matriz era precisamente conhecida teve maior abrangência, o que era esperado, pois as incertezas diminuem a abrangência das soluções, mas em contraponto oferece maior flexibilidade, uma vez que não é necessário conhecer exatamente todos os valores da MPT. Além disso, quando comparado o b_{max} obtido entre $\xi = 0$ e outros valores, os resultados foram mais abrangentes quanto o parâmetro ξ estava atuando, mostrando o menor conservadorismo da condição proposta.

4 Condição de análise utilizando funções de Lyapunov com diferença de primeira ordem

A busca pela estabilidade dos sistemas é algo preponderante para muitas aplicações. Como a maioria dos sistemas reais são incertos, é fato que novas metodologias de análise são necessárias; contudo, a literatura atual é por muitas vezes conservadora. Portanto, o objetivo desse texto é apresentar uma nova abordagem que permita verificar a estabilidade de MJLS.

Neste capítulo é discutida uma outra abordagem para análise de MJLS, por meio de funções de Lyapunov com ordem superior de estados. O desenvolvimento é feito no domínio discreto e utiliza uma abordagem similar à feita em Pessim *et al.* (2017). A principal contribuição é a apresentação de um modelo sistemático para verificar a estabilidade de MJLS discretos no tempo. As condições suficientes são dadas na forma de LMIs robustas e podem ser resolvidas com o auxílio de pacotes computacionais existentes.

Vale ressaltar que o número de estados adicionados à função candidata de Lyapunov pode ser genérico. Contudo, nesse trabalho, utiliza-se apenas o estado atual e o estado seguinte, uma vez que os MJLS são modelados por uma cadeia de Markov e o valor do próximo estado depende apenas do atual.

O teorema a seguir apresenta condições LMIs suficientes, para certificar a estabilidade de um MJLS discreto no tempo.

Teorema 4.1. *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas P_{11i} e $P_{22i} \in \Re^{n_x \times n_x}$, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas para cada $i = 1, \dots, N$,*

$$T_i > 0, \quad (4.1)$$

$$A_i' T p_i A_i - T_i < 0, \quad (4.2)$$

em que

$$T_i = P_{11i} + A_i' P_{22i} A_i$$

$$T p_i = \sum_{j=1}^N p_{ij} T_j,$$

então o sistema (2.1) é assintoticamente estável.

Prova: Multiplicando-se (4.1) por x'_k à esquerda e x_k à direita tem-se

$$x'_k(P_{11i} + A'_i P_{22i} A_i)x_k > 0. \quad (4.3)$$

Substituindo-se a definição de sistema discreto mostrado em (2.4), pode-se reescrever (4.3) como

$$x'_k P_{11i} x_k + x'_{k+1} P_{22i} x_{k+1} > 0, \quad (4.4)$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} x'_k & x'_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11i} & 0 \\ 0 & P_{22i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} > 0, \quad (4.5)$$

ou seja, assim como em (2.23), $V(x_k)$ é definida positiva. Multiplicando-se a condição (4.2) por x'_k à esquerda e x_k à direita tem-se

$$x'_k(A'_i T_{pi} A_i - T_i)x_k < 0. \quad (4.6)$$

Substituindo-se a definição de sistema discreto mostrado em (2.4), pode-se escrever a equação anterior como

$$x'_{k+1} T_{pi} x_{k+1} + x'_k T_i x_k < 0, \quad (4.7)$$

que é equivalente a (2.24), $\Delta V(x_k) < 0$.

As LMIs apresentadas como condições para análise dos MJLS (4.2) requerem a existência de matrizes P_i e \mathbb{P} precisamente conhecidas. Contudo, é comum não possuir exatamente quais são os valores da MPT, no momento da análise do sistema. Por isso, essas incertezas são levadas em consideração, tratando as matrizes T_{pi} como politópicas.

Teorema 4.2. *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas P_{11i} e $P_{22i} \in \Re^{n_x \times n_x}$, que satisfaçam as seguintes LMIs*

$$T_i > 0 \quad (4.8)$$

e

$$A'_i T_{pi}(\alpha) A_i - T_i < 0, \quad (4.9)$$

em que as matrizes T_i e $T_{pi}(\alpha)$ são definidas como

$$T_i = P_{11i} + A'_i P_{22i} A_i \quad (4.10)$$

e

$$T_{pi}(\alpha) = \sum_{j=1}^N \left[\sum_{k=1}^V \alpha_k (p_{ij})_k \right] T_j, \quad (4.11)$$

sendo N o número de modos do MJLS e V a quantidade de vértices do simplex referente a cada linha de \mathbb{P} , com $\sum_{k=1}^V \alpha_k = 1$, $\forall i \in K$, então, o sistema definido em (2.4) é assintoticamente estável.

A prova do Teorema 4.2 será omitida, uma vez que é similar à prova do Teorema 4.1.

4.1 Exemplos numéricos

Exemplo 1 (Adaptado de (COSTA *et al.*, 2005)): O modelo multiplicador acelerador de Samuelson, publicado em 1939, é possivelmente o primeiro modelo dinâmico baseado em teorias econômicas para resolver o problema de determinação de renda e o ciclo de negócios. Essa é uma aplicação muito interessante do MJLS para a modelagem econômica, empregando o modelo multiplicador-acelerador e foi adaptada para estudo de incertezas politópicas na probabilidade.

As matrizes do sistema são dadas por

$$A_1 = b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.5 & 3.2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -43.7 & 45.4 \end{bmatrix}, \quad A_3 = b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5.3 & -5.2 \end{bmatrix},$$

em que b é um parâmetro escalar variável. Dois casos são considerados, um com a MPT precisamente conhecida

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.17 & 0.16 \\ 0.3 & 0.47 & 0.23 \\ 0.26 & 0.1 & 0.64 \end{bmatrix},$$

e o outro com a \mathbb{P} incerta.

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} [0.5 \ 0.75] & [0.15 \ 0.25] & [0.15 \ 0.3] \\ [0.2 \ 0.35] & [0.35 \ 0.5] & [0.2 \ 0.4] \\ [0.25 \ 0.35] & [0 \ 0.2] & [0.5 \ 0.7] \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

O objetivo principal desse exemplo é verificar se a inserção de um diferencial de primeira ordem é capaz de encontrar solução para o sistema, tanto com uma MPT precisamente conhecida quanto incerta. Para ambas as abordagens, o sistema é factível com $b_{max} = 0.3$. Os valores de b_{max} foram obtidos pela técnica de bisseção, numa rotina desenvolvida no MATLAB.

Mesmo percebendo que os resultados obtidos tanto utilizando um estado quanto as condições impostas pelo Teorema 4.1 são equivalentes, vale ressaltar que o fato de possuir um diferencial superior de estados pode produzir melhores resultados se a condição for melhor explorada.

Exemplo 2: Foram geradas aleatoriamente matrizes de dinâmica dos estados de um MJLS com três modos de operação que poderiam representar, por exemplo, um SUV (do inglês, *Suburban Vehicle*). Para tal, supondo que os estados analisados são inclinação e trepidação e que os modos de operação podem ser definidos como urbano, rural e viagem. As matrizes hipotéticas geradas são

$$A_1(\textit{urbano}) = \begin{bmatrix} -0.96 & -0.18 \\ 0.67 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad A_2(\textit{rural}) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.03 \\ -0.02 & 0.43 \end{bmatrix},$$

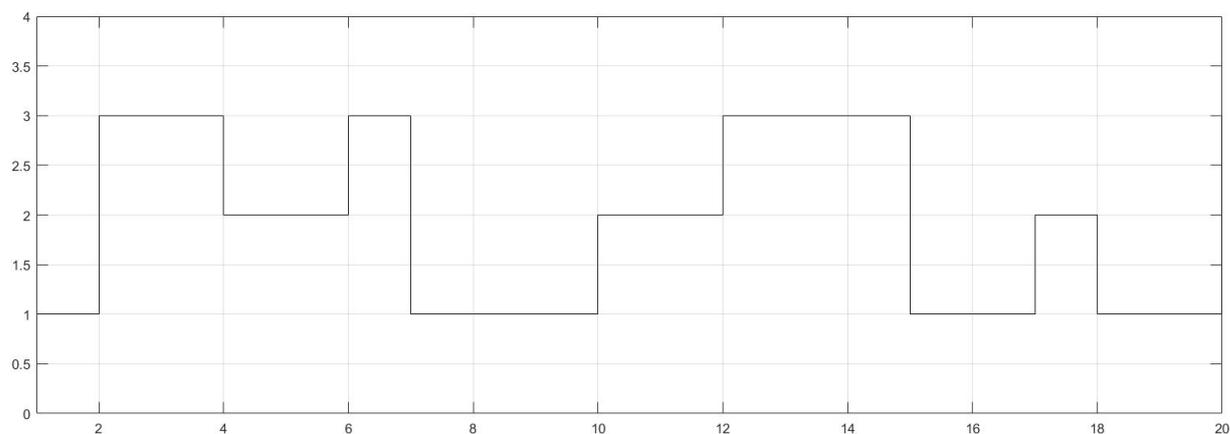
$$A_3(\textit{viagem}) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.11 \\ -0.36 & -0.33 \end{bmatrix}.$$

Neste exemplo, é considerada apenas a MPT incerta, visto que não se pode prever em qual terreno o carro irá andar. Além disso, as probabilidades são totalmente desconhecidas, uma vez que as características podem variar muito entre os tipos de terreno. Logo, a MPT é definida como

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} [0 \ 1] & [0 \ 1] & [0 \ 1] \\ [0 \ 1] & [0 \ 1] & [0 \ 1] \\ [0 \ 1] & [0 \ 1] & [0 \ 1] \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

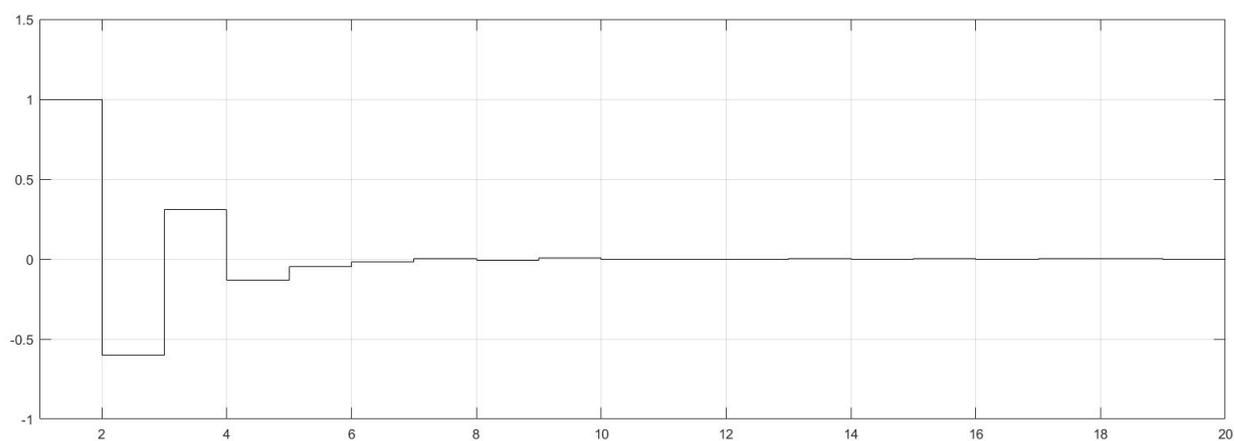
Então, o Teorema 4.1 é empregado para analisar se os carros são realmente estáveis. Para esse caso, o SUV passou nos testes, pois o carro é assintoticamente estável, o que comprova a eficiência do projeto. A seguir, são vistos graficamente o chaveamento entre os modos de operação na Figura 9, o comportamento temporal do primeiro estado em malha aberta na Figura 10 e o comportamento do segundo estado na Figura 11, considerando um estado inicial $x_0 = [1 \ -2]'$

Figura 9 – Processo de Markov.



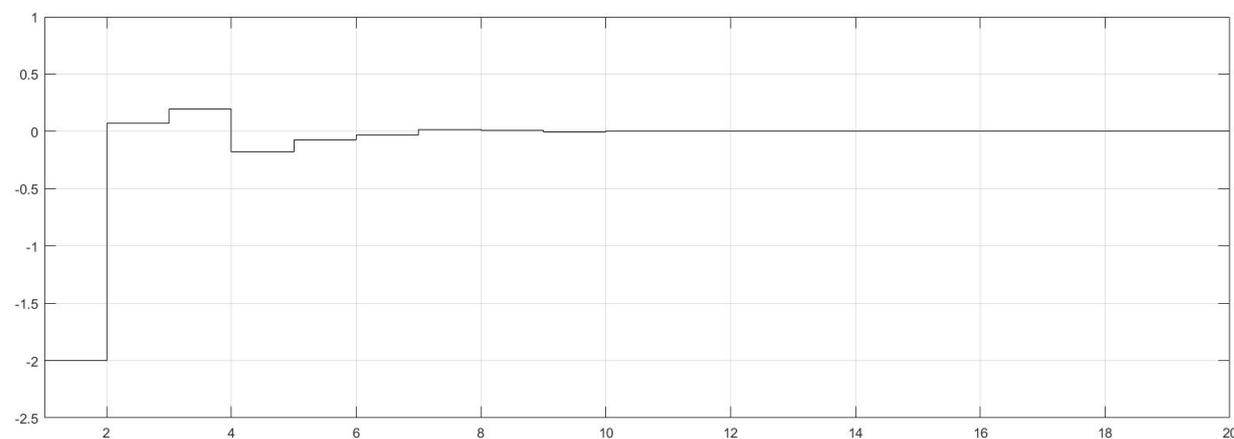
Fonte: Do Autor

Figura 10 – Comportamento temporal da 1ª variável de estado - Malha Aberta.



Fonte: Do Autor

Figura 11 – Comportamento temporal da 2ª variável de estado - Malha Aberta.



Fonte: Do Autor

A estabilidade do exemplo também foi testada pela condição com apenas um estado na função candidata de Lyapunov, da qual obteve-se o mesmo resultado. Apesar da similaridade das análises, as condições do Teorema 4.1 podem ser menos conservadoras, necessitando explorar mais exemplos e realizar mais testes.

5 Conclusão

Este trabalho investigou novas condições que fossem capazes de reduzir o conservadorismo da análise de estabilidade e estabilização dos MJLS. Previamente, foi realizada uma revisão bibliográfica para contextualização do assunto e definição de uma importante base teórica. Como primeira contribuição, foi apresentado um teorema capaz de sintetizar leis de controle dependente ou independente de modo para MJLS que podem conter uma MPT precisamente conhecida ou incerta, conferindo menor conservadorismo do que as abordagens presentes na literatura. Inicialmente, visando conferir maior flexibilidade na obtenção de leis de controle, a opção de escolher se a lei de controle será dependente ou independente de modo é fator importante, uma vez que, para cada tipo de aplicação, a condição pode ser adaptada para ser menos conservadora. Avaliando a consideração de incertezas politópicas na MPT, pode-se garantir ainda mais autonomia ao projetista, uma vez que conhecer precisamente as probabilidades de chaveamento do processo de Markov tende a ser muito difícil. Logo, ter a possibilidade de inserir um intervalo de valores, mesmo que entre 0 e 1 (caso totalmente desconhecido), é uma vantagem para testes iniciais. Um grande benefício do Teorema 3.1, é que ele apresenta apenas uma LMI como condição, ao passo que algumas outras técnicas existentes apresentam duas LMIs para cômputo da lei de controle, o que garante maior eficiência a condição desenvolvida, a qual, para o mesmo sistema em análise, possui menor número de variáveis escalares e linhas de LMIs, e pode ser comprovado pelos diversos exemplos numéricos do Capítulo 3.

Como segunda contribuição, foi apresentada uma nova metodologia para análise de MJLS por meio de um diferencial de primeira ordem, aplicado na função candidata de Lyapunov. Isso resulta que a matriz candidata de Lyapunov não é apenas uma, como outrora, mas sim uma composição de duas matrizes na sua diagonal principal, como visto na Definição 2.4. Com a inserção de mais um estado para análise, esperava-se que os resultados obtidos fossem mais abrangentes quando comparados com a condição de apenas um estado.

Como trabalhos futuros, destaca-se que a condição construída com a diferença de primeira ordem produziu os mesmos resultados que a condição padrão da literatura. Assim sugere-se que o Teorema 4.2 seja explorado mais extensivamente, a fim de comprovar se a condição proposta é menos conservadora ou não. Além disso, podem ser inseridas incertezas politópicas em outras matrizes, como as matrizes da dinâmica do sistema e avaliar a aplicabilidade da técnica.

Referências

- BASHARIN, G. P.; LANGVILLE, A. N.; NAOUMOV, V. The life and work of A.A. Markov. *Meyn*, v. 386, p. 3–26, 07 2004.
- BOUKAS, E. K. H_∞ control of discrete-time markov jump systems with bounded transition probabilities. *OPTIMAL CONTROL APPLICATIONS AND METHODS*, 2009.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. Linear matrix inequalities in system and control theory. *SIAM Studies in Applied Mathematics*, 1994.
- COSTA, O.; FRAGOSO, M. Stability results for discrete-time linear systems with markovian jumping parameters. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 179, p. 154–178, out. 1993.
- COSTA, O.; FRAGOSO, M.; MARQUES, R. Discrete-time markovian jump linear systems. *Springer-Verlag*, 2005.
- GARCIA, A. *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*. Third. Upper Saddle River, NJ: Pearson/Prentice Hall, 2008. ISBN 9780131471221 0131471228.
- GONÇALVES, A. P. C. *Controle Dinâmico de Saída para Sistemas Discretos com Saltos Markovianos*. Tese (Doutorado) — UNICAMP, 2009.
- GONÇALVES, A. P. C.; FIORAVANTI, A. R.; GEROMEL, J. C. H_∞ robust and networked control of discrete-time mjls through LMIs. *Journal of The Franklin Institute*, 2012.
- JI, Y.; CHIZECK, H. J. Jump linear quadratic control: Steady state solution and testable conditions. *Control Theory and Advanced Technology*, v. 5, p. 289–319, 1990.
- MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. H_∞ state feedback control for MJLS with uncertain probabilities. *Automatica*, 2015.
- PAKSHINA, N. Aleksandr lyapunov: remembered by his contemporaries. *IFAC-PapersOnLine*, v. 50, n. 1, p. 5208 – 5218, 2017. ISSN 2405-8963. 20th IFAC World Congress.
- PESSIM, P. S.; OLIVEIRA, B.; LACERDA, M. J. Análise da estabilidade de sistemas incertos usando funções de Lyapunov com derivadas de ordem superior de estados. *XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 2017.
- VAL, J.; GEROMEL, J.; GONÇALVES, A. The H_2 -control for jump linear systems: cluster observations of the Markov state. *38ª Congresso Brasileiro de Automática*, 2001.



TERMO DE RESPONSABILIDADE

O texto do trabalho de conclusão de curso intitulado “Análise de Estabilidade e Estabilização de MJLS Empregando Parâmetros Escalares e Diferença de Primeira Ordem dos Estados” é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem a devida citação ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 17 de janeiro de 2019.

Wendell Lírio Fiore

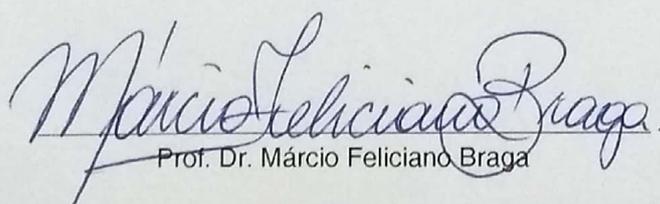


DECLARAÇÃO DE CONFERÊNCIA DA VERSÃO FINAL

Declaro que conferi a versão final a ser entregue pelo aluno Wendell Lírio Fiore, autor do trabalho de conclusão de curso intitulado Análise de Estabilidade e Estabilização de MJLS Empregando Parâmetros Escalares e Diferença de Primeira Ordem dos Estados quanto à conformidade nos seguintes itens:

1. A monografia corresponde a versão final, estando de acordo com as sugestões e correções sugeridas pela banca e seguindo as normas ABNT;
2. A versão final da monografia inclui a ata de defesa (Anexo IV - apenas verso), a ficha catalográfica e o termo de responsabilidade (ANEXO X -) devidamente assinado.

João Monlevade, 17 de janeiro de 2019.


Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga