



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Escola de Minas – Departamento de Engenharia Civil
Curso de Graduação em Engenharia Civil

Paulo Henrique Pereira da Silva

**ESFORÇOS INTERNOS EM VIGAS SOBRE APOIOS
ELÁSTICOS LINEARES USANDO A EQUAÇÃO DOS TRÊS
MOMENTOS**

Ouro Preto

2018

Esforços Internos em Vigas Sobre Apoios Elástico Lineares Usando a Equação dos
Três Momentos

Paulo Henrique Pereira da Silva

Monografia de conclusão de curso para
obtenção do grau de Engenheiro Civil na
Universidade Federal de Ouro Preto
defendida e aprovada em 29 de novembro
de 2018 como parte dos requisitos para a
obtenção do Grau de Engenheiro Civil.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. D.Sc. Jaime Florencio Martins - UFOP

Ouro Preto

2018

S658e

Silva, Paulo Henrique Pereira.

Esforços internos em vigas sobre apoios elástico lineares usando a equação dos três momentos [manuscrito] / Paulo Henrique Pereira Silva. - 2018.

76f.: il.: color; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Jaime Florencio Martins.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil.

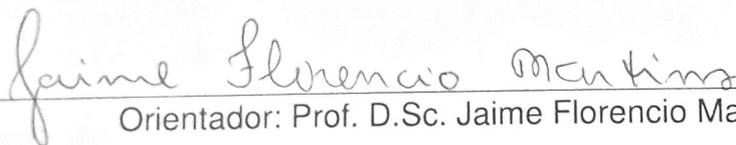
1. Vigas Hiperestáticas. 2. Equação dos Três Momentos. 3. Variação de Temperatura. 4. Esforços Internos. 5. Apoios Elásticos Lineares. I. Martins, Jaime Florencio. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 624

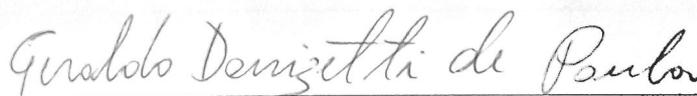
Esforços Internos em Vigas Sobre Apoios Elásticos Lineares Usando a Equação dos
Três Momentos

Paulo Henrique Pereira da Silva

Monografia de conclusão de curso para
obtenção do grau de Engenheiro Civil na
Universidade Federal de Ouro Preto
defendida e aprovada em 29 de novembro
de 2018 como parte dos requisitos para a
obtenção do Grau de Engenheiro Civil.
Banca examinadora:



Orientador: Prof. D.Sc. Jaime Florencio Martins - UFOP



Membro: Prof. D.Sc. Geraldo Donizetti de Paula – UFOP



Membro: Prof. M.Sc. Rafael Cesário Barros – UFOP

“Cum mente et malleo”

*Dedico este trabalho a todos os professores, especialmente orientador
Prof.D.Sc Jaime Florencio Martins, familiares, namorada e amigos que
se fizeram presentes ao longo desses anos de graduação.*

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida e por estar sempre iluminando e guiando minha trajetória.

Aos meus pais Ricardo e Maria Beatriz e irmã Layla Sabrina por todo amor, apoio e exemplos. A eles minha eterna gratidão.

A minha namorada Júlia Arruda por todo amor e por se fazer presente em todos os momentos.

A todos os familiares que estiveram sempre na torcida pelo meu sucesso.

A todos os amigos de infância, em especial, Arthur Ribeiro, Bruno Freitas, Eduardo Arruda, Eric Ypuena, Caio César, Flávio Machado, Igor Alves, Laura Maísa, Laura Olivera, Thays Cristine e Thiago Reis pela amizade e companheirismo.

A todos os colegas da graduação, em especial André Faria, Allana Vimieiro, Ana Carolina Matias, Hélio Ribeiro, Iara Magalhães, Jefferson de Oliveira, Liselle, Lucas de Melo, Mauro Júnior e Victor Braga pela grande amizade e companheirismo durante toda a graduação.

A todos os colegas da República Ludus, André Costa, Caio César, Cleiton de Faria, Ivo Meira, José Balena, Leonardo Miranda e Phillipe Leon pela grande amizade.

A todos os amigos do grupo PET Civil responsáveis por contribuir para meu crescimento pessoal e profissional.

A todos os professores do Departamento de Engenharia Civil da UFOP que foram os responsáveis por repassar todo o conhecimento e por contribuírem para minha formação de qualidade. Em especial, Andréa Dias, Geraldo Donizetti, Gilberto Queiroz, Guilherme Brigolini, Jaime Florencio, Júlia Mendes, Lucas Deleon, Maria Luíza, Ricardo Azoubel, Ricardo Fiorotti e Romero César.

A todos os colegas de trabalho da MRV Engenharia por todos os ensinamentos.

A Fundação Gorceix por todo apoio financeiro, oportunidade de crescimento profissional e grandes amizades que surgiram ao longo da minha trajetória na instituição.

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo principal, o estudo dos esforços internos em vigas contínuas e hiperestáticas sobre apoios elásticos lineares submetidas a carregamentos externos e variação de temperatura, utilizando o Método da Equação dos Três Momentos. Para a realização do estudo, foi desenvolvido um modelo estrutural que foi submetido a três tipos diferentes de solicitações: carregamento externo, variação da temperatura e ambas solicitações em conjunto. Com o objetivo de se obter os esforços internos em cada um dos modelos propostos, foi utilizado duas ferramentas de análise estrutural: o F-Tool, ferramenta amplamente utilizada como análise estrutural no ambiente acadêmico e o programa, em linguagem FORTRAN, desenvolvido pelo Professor Doutor Jaime Florencio Martins, do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto. É sabido que existem vários métodos de cálculos para se obter os esforços internos de estruturas hiperestáticas, mas o método utilizado como base para o desenvolvimento do programa foi a Equação dos Três Momentos, cuja teoria está apresentada nesse presente trabalho. Os resultados obtidos para as duas ferramentas de análise estrutural apresentaram resultados bastante similares contendo apenas pequenas diferenças justificadas pela quantidade de casas decimais dos parâmetros de entrada de dados e de arredondamentos numéricos utilizados em cada um dos programas. Admitindo o F-Tool como ferramenta de validação, é possível afirmar, portanto, que o programa, em linguagem FORTRAN, apresentou ótimos resultados para vigas contínuas e hiperestáticas sobre apoios elásticos lineares submetidas a carregamento externo e variação da temperatura.

Palavras-chaves: *Vigas Hiperestáticas, Equação dos Três Momentos, Variação de Temperatura, Esforços Internos, Estruturas, Apoios Elásticos Lineares.*

ABSTRACT

The main objective of this work is the study of the internal stresses in continuous and hyperstatic beams on linear elastic supports subjected to external loads and temperature variation using the Three Moment Equation Method. For the study, a structural model was developed that was submitted to three different types of requests: external loading, temperature variation and both requests together. In order to obtain internal efforts in each of the proposed models, two structural analysis tools were used: the F-Tool, a tool widely used as structural analysis in the academic environment, and the FORTRAN language program developed by Professor Doctor Jaime Florencio Martins, from the Civil Engineering Department of the Federal University of Ouro Preto. It is known that there are several methods of calculations to obtain the internal stresses of hyperstatic structures, but the method used as the basis for the development of the program was the Equation of the Three Moments, whose theory is presented in this present work. The results obtained for the two tools of structural analysis presented very similar results containing only small differences justified by the number of decimal places of the data input parameters and numerical rounding used in each one of the programs. Assuming the F-Tool as a validation tool, it is possible to affirm, therefore, that the program, in FORTRAN language, presented excellent results for continuous and hyperesthetic beams on linear elastic supports subjected to external loading and temperature variation.

Keywords: *Hypertensive Beams, Equation of Three Moments, Temperature Variation, Internal Effort, Structures, Linear Elastic Support.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Ilustração do momento infinitesimal que surge em função da força $\sigma_x.dA$	4
.....	4
Figura 2: Viga submetida a flexão pura.....	5
Figura 3: Viga submetida a flexão.....	6
Figura 4: Modelo estrutural a ser utilizado	9
Figura 5: Configuração deformada da viga	9
Figura 6: Definição das dimensões.....	10
Figura 7: Elemento infinitesimal ds aproximado.....	11
Figura 8: Viga biapoiada submetida a um momento na extremidade.....	15
Figura 9: Modelo estrutural proposto	17
Figura 10: Agrupamento de vãos (vão 1 e vão 2)	18
Figura 11: Agrupamento de vãos (vão 2 e vão 3)	18
Figura 12: Modelo estrutural genérico.....	19
Figura 13: Configuração deformada do modelo estrutural genérico.....	19
Figura 14: Vãos divididos para aplicação da Equação dos Três Momentos.....	19
Figura 15: Viga biapoiada submetida a uma variação de temperatura.....	24
Figura 16: Viga flexionada em função da variação de temperatura.....	25
Figura 17: Seção transversal da viga submetida à variação da temperatura	25
Figura 18: Viga genérica sobre apoios deformáveis	27
Figura 19: Deslocamentos da viga sobre apoios deformáveis	27
Figura 20: Modelo estrutural utilizado para validação do programa	30
Figura 21: Seção transversal adotada	30
Figura 22: Modelo estrutural que será idealizado pelo programa.....	31

Figura 23: Carregamento externo aplicado	31
Figura 24: Viga submetida a variação da temperatura	31
Figura 25: Carregamento externo aplicado e variação da temperatura.....	32
Figura 26: (a) Entrada de dados do modelo 1	33
Figura 27: (b) Entrada de dados do modelo 1	33
Figura 28: (c) Entrada de dados do modelo 1	34
Figura 29: (a) Entrada de dados do modelo 2.....	34
Figura 30: (b) Entrada de dados do modelo 2.....	35
Figura 31: (c) Entrada de dados do modelo 2.....	35
Figura 32: (a) Entrada de dados do modelo 3.....	36
Figura 33: (b) Entrada de dados do modelo 3.....	36
Figura 34: (c) Entrada de dados do modelo 3.....	37
Figura 35: Diagrama do momento fletor do modelo estrutural 1	38
Figura 36: Diagrama do esforço cortante do modelo estrutural 1.....	38
Figura 37: Reações de apoio do modelo estrutural 1	38
Figura 38: Diagrama do momento fletor do modelo estrutural 2	39
Figura 39: Diagrama do esforço cortante do modelo estrutural 2.....	39
Figura 40: Reações de apoio do modelo estrutural 2.....	39
Figura 41: Diagrama do momento fletor do modelo estrutural 3	40
Figura 42: Diagrama do esforço cortante do modelo estrutural 3.....	40
Figura 43: Reações de apoio do modelo estrutural 3.....	40
Figura 44: Desenhando o comprimento total da viga	41
Figura 45: Localização dos pontos importantes da estrutura	42
Figura 46: Aplicação do engaste no primeiro apoio	43

Figura 47: Aplicação do apoio elástico.....	44
Figura 48: Aplicação do apoio de segundo gênero	45
Figura 49: Aplicação do apoio de primeiro gênero	46
Figura 50: Aplicando a seção transversal sobre a viga	47
Figura 51: Aplicação do tipo de material da viga.....	48
Figura 52: Viga submetida ao carregamento com propriedades físicas aplicadas	49
Figura 53: Viga submetida a variação da temperatura com propriedades físicas definidas	49
Figura 54: Viga submetida a carregamento externo e variação da temperatura com propriedades físicas definidas.....	50
Figura 55: Diagrama do momento fletor do modelo 1	51
Figura 56: Diagrama do esforço cortante do modelo 1	51
Figura 57: Reações de apoio do modelo 1	51
Figura 58: Diagrama do momento fletor para o modelo 2	51
Figura 59: Diagrama do esforço cortante para o modelo 2	52
Figura 60: Reações de apoio para o modelo 2	52
Figura 61: Diagrama do momento fletor para o modelo 3.....	52
Figura 62: Diagrama do esforço cortante do modelo 3	52
Figura 63: Reações de apoio do modelo 3	53

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Coeficientes K1 e K2 da Equação dos Três Momentos.....	22
Tabela 2: Comparativo de resultados obtidos pelos dois programas para o modelo estrutural 1	53
Tabela 3: Comparativo de resultados obtidos pelos dois programas para o modelo estrutural 2.....	54
Tabela 4: Comparativo de resultados obtidos pelos dois programas para o modelo estrutural 3.....	54

SUMÁRIO

1	Introdução	1
1.1	Objetivo	2
1.1.1	Objetivos Específicos	2
2	Revisão Bibliográfica	3
2.1	Equação da Linha Elástica	3
2.1.1	Hipóteses de Deformação de uma Viga Submetida à Flexão	3
2.1.2	Momento Fletor e Tensão Normal	4
2.1.3	Deformações Específicas Associadas à Flexão	5
2.1.4	Momento Fletor e a Curvatura da Viga	8
2.1.5	Dedução da Equação da Linha Elástica	9
2.2	Estruturas Isostáticas e Estruturas Hiperestáticas	13
2.2.1	Estruturas Isostáticas	13
2.2.2	Estruturas Hiperestáticas	14
2.3	O Método da Equação dos Três Momentos	15
2.3.1	Rotação em Função de um Momento M Aplicado Sobre o Apoio	15
2.3.2	O Desenvolvimento da Dedução da Equação dos Três Momentos	17
2.3.3	Rotação em Função do Momento Fletor M_{i-1} Aplicado Sobre o Apoio $i-1$	20
2.3.4	Rotação em Função do Momento Fletor M_i Aplicado Sobre o Apoio i	21
2.3.5	Rotação em Função de Qualquer Tipo de Carregamento Intermediário Aplicado ao Longo do Vão	21
2.3.6	Cálculo Final da Rotação $\theta_{iesquerda}$	22
2.3.7	Cálculo Final da Rotação $\theta_{idireita}$	23
2.3.8	Desenvolvimento Final da Equação dos Três Momentos	23
2.4	Efeito Térmico	23
2.4.1	A Linha Elástica Para Efeitos Térmicos	24
2.5	Apoios Elásticos e a Equação dos Três Momentos	26
3	Metodologia	30
3.1	O Modelo Estrutural	30

3.2	Natureza dos Carregamentos	31
3.3	Entrada de Dados (FORTRAN)	32
3.4	Resultado da Simulação (FORTRAN)	37
3.5	Diagramas de Momento Fletor e Esforço Cortante	37
3.6	Entrada de Dados no F-Tool	41
3.6.1	Modelando a Estrutura	41
3.7	Resultados da Simulação do F-Tool	50
4	Conclusão	55
4.1	Sugestões para Futuras Pesquisas	55
	REFERÊNCIAS	56
	<i>Apêndice A: Relatório Gerado Pelo Programa Em Linguagem Fortran Para O Modelo Estrutural 1</i>	57
	<i>Apêndice B: Relatório Gerado Pelo Programa Em Linguagem Fortran Para O Modelo Estrutural 2</i>	59
	<i>Apêndice C: Relatório Gerado Pelo Programa Em Linguagem Fortran Para O Modelo Estrutural 3</i>	61

1 INTRODUÇÃO

Segundo Martha (2010), a análise estrutural é a etapa do projeto estrutural responsável por prever todos os comportamentos mecânicos do sistema. Esses comportamentos podem ser traduzidos através de diversas grandezas físicas, tais como tensões, deformações e deslocamentos da estrutura. De uma forma geral, é possível afirmar que a análise estrutural tem, como objetivo principal, determinar os esforços internos e externos, deslocamentos e correspondentes deformações que surgem na estrutura a fim de comparar com as resistências físicas dos materiais que estão sendo utilizados nos elementos estruturais constituintes. Essa análise, por sua vez, deverá ser feita para os diversos estágios de solicitações que, a partir da experiência do Engenheiro Estrutural, devem ser previamente determinados.

Nesse sentido, esse trabalho abordará temas que envolvem a teoria da análise estrutural, se restringindo ao estudo da determinação dos esforços internos de vigas hiperestáticas contínuas, sobre apoios rígidos e elásticos lineares, submetidas a carregamentos e variação de temperatura de acordo com os modelos previamente determinados, utilizando o Método da Equação dos Três Momentos. Vale ressaltar também que, a teoria em que o método se apoia vem evidenciada ao longo das seções desse presente trabalho, a fim de garantir uma compreensão efetiva de todo o estudo desenvolvido.

Para a resolução dos modelos será utilizado o programa, em linguagem FORTRAN, desenvolvido pelo Professor Doutor Jaime Florencio Martins, do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto. Como alternativa de validação do programa, os resultados obtidos foram comparados com os resultados gerados a partir do programa F-TOOL, amplamente utilizado no ambiente acadêmico da Engenharia Civil para a realização do processo de análise estrutural de sistemas isostáticos e hiperestáticos.

1.1 Objetivo

As vigas hiperestáticas podem ser solicitadas por diferentes formas de carregamento bem como pela variação da temperatura. Para se calcular todos os esforços internos que surgem à medida em que esses tipos de estruturas são solicitados por essas diferentes naturezas de carregamento, existem vários métodos de análise estrutural que permitem quantificar a grandeza desses esforços internos.

Nesse sentido, esse trabalho visa determinar os esforços internos (momento fletor e força cortante) e as deflexões de vigas sobre apoios elásticos lineares submetidas à variação de temperatura, utilizando o Método da Equação dos Três Momentos. Para a obtenção dos resultados, será utilizado um programa de computador, na linguagem FORTRAN, desenvolvido na UFOP, e como critério de comparação e validação, o programa F-TOOL, que foi originalmente criado pelo Professor Luiz Fernando Martha, do Departamento de Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), e agora, é de responsabilidade da empresa ALIS Soluções em Engenharia e Sistemas.

1.1.1 Objetivos Específicos

Esta pesquisa tem como objetivo determinar os esforços internos (momento fletor e força cortante) e as deflexões de vigas sobre apoios elásticos lineares submetidos à variação da temperatura. O método a ser usado é o Método da Equação dos Três Momentos, utilizando o programa em linguagem FORTRAN desenvolvido na UFOP. Os resultados serão comparados como os resultados obtidos pelo programa F-TOOL.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesse capítulo serão abordados conceitos importantes relacionados a análise estrutural que serão fundamentais para a plena compreensão desse presente trabalho. Além disso, será apresentado todo o embasamento teórico do Método da Equação dos Três Momentos utilizado para o cálculo dos esforços internos das estruturas.

2.1 Equação da Linha Elástica

Segundo Hibbeler (2010), antes de determinar a inclinação ou o deslocamento em um ponto de uma viga (ou eixo), geralmente convém traçar um rascunho da forma defletida da viga quando carregada, de modo a 'visualizar' quaisquer resultados calculados e, com isso, fazer uma verificação parcial desses resultados. O diagrama da deflexão do eixo longitudinal que passa pelo centroide de cada área da seção transversal da viga é denominado linha elástica.

Nesse capítulo, será deduzida a equação da linha elástica que é de fundamental importância para a compreensão do Cálculo de Estruturas Hiperestáticas utilizando o Método da Equação dos Três Momentos.

Para facilitar a elaboração desse estudo, por convenção será estabelecido:

- Esforços de tração serão apresentados com sinal positivo, e esforços de compressão, negativos;
- Momento fletor positivo serão aqueles em que se tracionarão as fibras inferiores e comprimirão as fibras superiores da seção transversal. Já o momento fletor negativo, causará efeitos contrários aos descritos anteriormente.

2.1.1 Hipóteses de Deformação de uma Viga Submetida à Flexão

São consideradas hipóteses básicas relacionadas a deformação de uma viga sujeita à flexão:

- A seção transversal plana perpendicular ao eixo da barra permanece plana quando submetida à flexão;

- A seção transversal plana permanece perpendicular ao eixo da viga quando a mesma está submetida à flexão.

2.1.2 Momento Fletor e Tensão Normal

É possível afirmar que no caso de flexão simples ou pura, se for contabilizado, ao longo da área da seção transversal, todos os esforços internos normais, o resultado encontrado será nulo. Isso ocorre porque, nos casos de flexão simples ou pura não há a formação de esforços normais, e, portanto, pode-se afirmar que:

$$N = \int \sigma_x dA = 0 \quad (2.1)$$

De maneira análoga, é possível determinar o momento fletor em uma seção transversal ao se admitir o somatório de todos os momentos infinitesimais dM que surgem em função das forças infinitesimais $\sigma_x dA$. Assim, tem-se:

$$dM = -y \cdot \sigma_x \cdot dA \quad (2.2)$$

sendo, y a distância vertical da força $\sigma_x \cdot dA$ ao centro de gravidade da seção transversal em estudo, conforme ilustrado na Figura 1: **Ilustração do momento infinitesimal que surge em função da força $\sigma_x \cdot dA$** . É importante ressaltar que, para se obedecer às convenções de sinais propostas bem como a orientação dos eixos cartesianos da seção transversal, faz-se necessário a introdução do sinal (-) como apresentado na Equação (2.2).

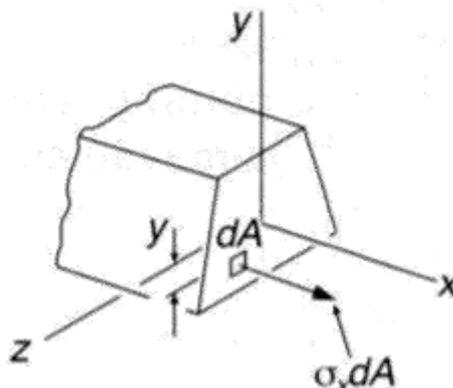


Figura 1: Ilustração do momento infinitesimal que surge em função da força $\sigma_x \cdot dA$

Fonte: (Martha, Métodos Básicos da Análise de Estruturas, 2010)

Dessa forma, portanto, é possível definir o momento fletor que atua em cada seção transversal sujeita a flexão pura ou simples como:

$$M = \int -\sigma_x y dA \quad (2.3)$$

2.1.3 Deformações Específicas Associadas à Flexão

Para se continuar o estudo, considere um trecho de viga submetida a flexão pura, ou seja, submetida a um momento fletor positivo M como pode ser observado na Figura 2.

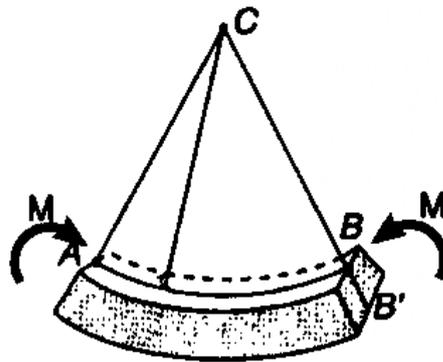


Figura 2: Viga submetida a flexão pura

Fonte: (Martha, Métodos Básicos da Análise de Estruturas, 2010)

De acordo com a simulação acima mencionada, é possível perceber que o momento fletor é constante ao longo de todo o comprimento da viga e a mesma se flexiona de maneira uniforme. Isso significa que, a linha AB, inicialmente, era reta e paralela ao eixo longitudinal da viga, e, no momento em que fica submetida à flexão, o segmento AB se transforma em um arco de círculo com centro no ponto C. Ao se considerar a convenção de sinais, é notável que o arco AB diminuiu de comprimento quando a viga foi flexionada.

A diminuição do comprimento do segmento AB pode ser observado quando analisado a Figura 3.

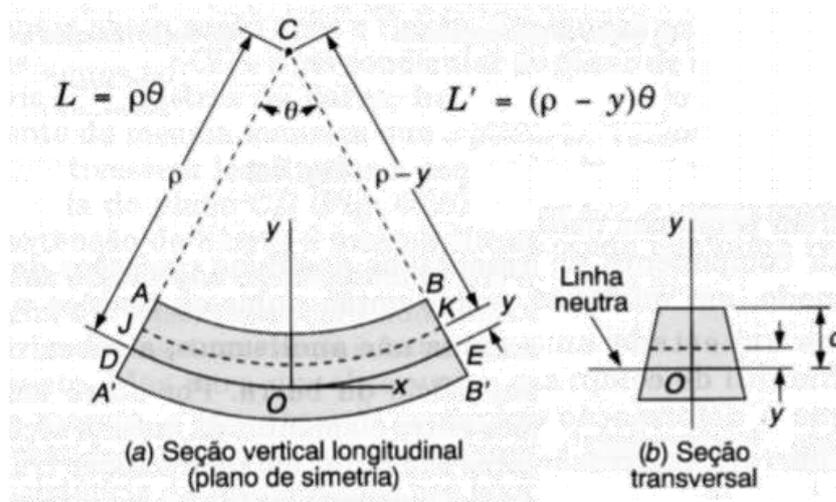


Figura 3: Viga submetida a flexão

Fonte: (Martha, Métodos Básicos da Análise de Estruturas, 2010)

Para se determinar a deformação específica da viga, é necessário se definir algumas propriedades geométricas. Veja:

- L , comprimento inicial da viga antes da ação do momento fletor;
- Os eixos de coordenadas xyz estão localizados sobre o centro de gravidade das seções transversais;
- θ (em radianos), o ângulo central da curvatura da viga;
- ρ , raio do arco correspondente ao segmento DE ;

É sabido que existe uma superfície paralela à face superior da viga onde as propriedades de ε_x e σ_x são consideradas nulas e, portanto, não sofre nenhum tipo de variação do comprimento quando a viga está submetida a flexão simples, denominada no estudo da Resistência dos Materiais, como linha neutra. No caso desse tipo de flexão, a linha neutra coincide com o centro de gravidade da seção transversal. Assumindo que o segmento DE , na ilustração, represente a superfície neutra da viga, é possível concluir que o comprimento DE é igual a:

$$L_{inicial} = \rho\theta \quad (2.4)$$

onde ρ é escrito em metros (m) e θ , em radianos.

Tomando como referência o arco JK localizado a uma altura y acima da linha neutra da seção transversal, é possível determinar que seu novo comprimento (L_{final}), com a atuação do esforço em estudo é:

$$L_{final} = (\rho - y)\theta \quad (2.5)$$

Com o objetivo de se determinar a deformação específica, calcula-se o encurtamento da seção como sendo:

$$\delta = L_{final} - L_{inicial}$$

$$\delta = (\rho - y)\theta - \rho\theta$$

$$\delta = -y\theta \quad (2.6)$$

Dessa forma, a deformação específica em x pode ser determinada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L_{inicial}}$$

$$\varepsilon_x = \frac{-y\theta}{\rho\theta}$$

$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho} \quad (2.7)$$

Vale ressaltar que o sinal negativo representa que o ponto, em estudo, está sofrendo uma compressão.

Por definição, sabe-se que a curvatura de um círculo é dada pelo inverso do seu respectivo raio ρ , e, portanto, tem-se, para esse caso:

$$curvatura = 1/\rho \quad (2.8)$$

Considerando que a curvatura se mantém constante ao longo da viga em estudo, pode-se concluir que a deformação específica varia linearmente com a posição y do ponto em que se pretende calcular essa propriedade.

2.1.4 Momento Fletor e a Curvatura da Viga

É possível se obter uma equação que relaciona o momento fletor atuante em uma seção transversal a partir da curvatura associada a viga que surge em função da atuação de cargas. Para isso, fará se o uso das seguintes equações deduzidas anteriormente:

$$M = \int -\sigma_x y dA, \varepsilon_x = \frac{-y}{\rho} \text{ e } \sigma = E\varepsilon$$

Dessa forma, portanto tem-se, a partir da Lei de Hooke que:

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\sigma = E \frac{(-y)}{\rho} \quad (2.9)$$

Substituindo a Equação (2.9) na Equação (2.3), tem-se:

$$M = \int -\sigma_x y dA$$

$$M = \int -\left(E \frac{-y}{\rho}\right) y dA \quad (2.10)$$

Considerando que não há variação de E e ρ ao longo da seção transversal, pode-se então concluir que:

$$M = \frac{E}{\rho} \int y^2 dA \quad (2.11)$$

É sabido, por definição, que $\int y^2 dA$ é o momento de inércia da seção transversal, representado pela letra I. Sendo assim, tem-se:

$$M = \frac{E}{\rho} \int y^2 dA$$

$$M = \frac{EI}{\rho} \quad (2.12)$$

Assim, é possível perceber que a equação que relaciona a curvatura em função do momento fletor atuante na seção é dado por:

$$\text{curvatura} = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (2.13)$$

2.1.5 Dedução da Equação da Linha Elástica

Considere, o modelo estrutural, ilustrado pela Figura 4, a fim de ser utilizado para definir a equação da linha elástica.



Figura 4: Modelo estrutural a ser utilizado

Fonte: (Vanderlei, 2010)

Após a atuação do esforço P (vertical para cima), suponha-se que a configuração deformada da viga assuma o seguinte comportamento.

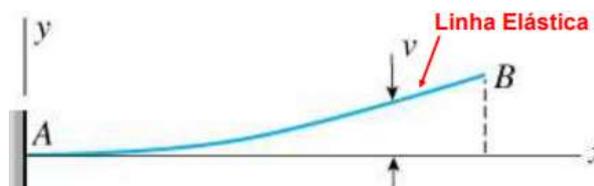


Figura 5: Configuração deformada da viga

Fonte: (Vanderlei, 2010)

É importante ressaltar que os eixos cartesianos utilizados para a obtenção das equações possuem origem no ponto A do modelo estrutural proposto.

A partir da configuração deformada dessa viga engastada livre, são definidas as seguintes dimensões, como ilustrado na Figura 6.

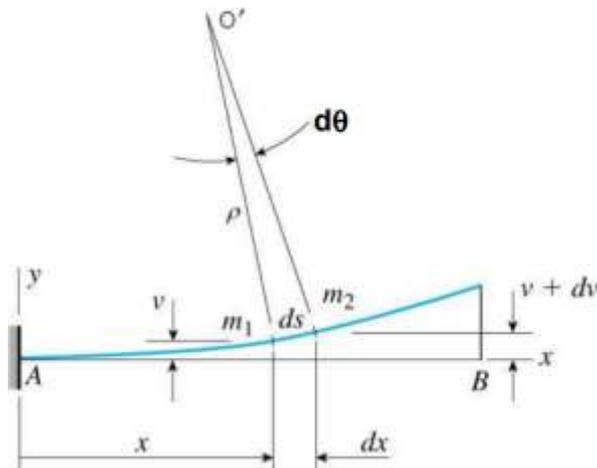


Figura 6: Definição das dimensões

Fonte: (Vanderlei, 2010)

Foi tomado um elemento infinitesimal de comprimento ds , localizado a uma distância x do ponto A. Os pontos m_1 e m_2 , por definição, são, respectivamente, o ponto inicial e final do segmento ds .

A deflexão vertical sofrida pelo elemento ds será definido pela letra v , sendo essa variável responsável por traduzir a equação da linha elástica a partir os eixos cartesianos xy utilizados para a dedução em estudo.

Ainda sobre a Figura 6, é observado uma rotação $d\theta$ do segmento ds que surge a partir da flexão da viga. Além disso, o raio de deformação da viga é representado pela letra ρ já enunciada nesse presente trabalho.

Tomando como referência apenas a localização do elemento ds , assume-se as seguintes variáveis:

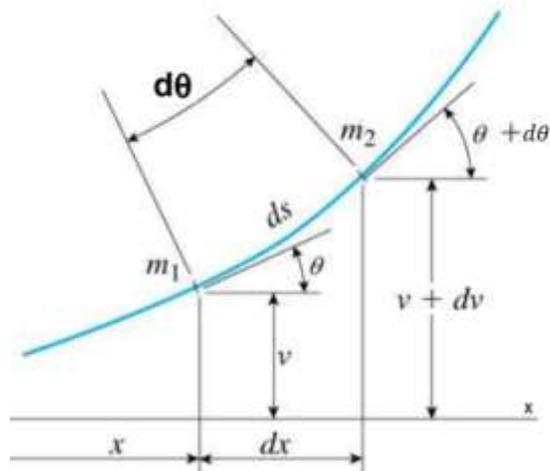


Figura 7: Elemento infinitesimal ds aproximado

Fonte: (Vanderlei, 2010)

A partir da Figura 6 e Figura 7 acima apresentadas, o comprimento do arco ds é dado por:

$$ds = \rho d\theta \quad (2.14)$$

Logo, a curvatura será dada pela seguinte relação:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}, \text{ onde } d\theta \text{ é dado em radianos} \quad (2.15)$$

Da assume-se as seguintes variáveis:

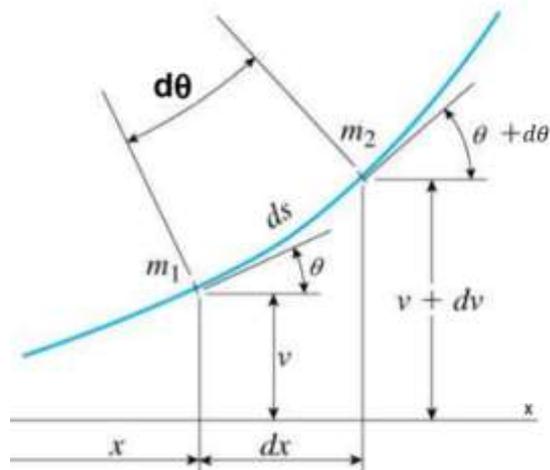


Figura 7: Elemento infinitesimal ds aproximado, obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{dv}{dx} = tg\theta, \text{ equação essa que determina a inclinação da linha elástica} \quad (2.16)$$

Quando se analisa as rotações em vigas submetidas a carregamentos, é válido assumir que essas rotações apresentam valores muito pequenos e, em função disso, é possível realizar as seguintes aproximações:

$$ds \approx dx \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \quad (2.17)$$

$$tg\theta \approx \theta \rightarrow \frac{dv}{dx} = tg\theta = \theta \quad (2.18)$$

Substituindo a Equação (2.18) na Equação (2.17), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{d\theta}{dx} \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right) \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{d^2v}{dx^2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Da seção anterior, encontrou-se a seguinte Equação (2.13) que relaciona a curvatura com o momento fletor atuante na seção transversal em estudo:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

Igualando as Equações (2.13) e (2.19), tem-se, finalmente, a equação diferencial que rege a linha elástica de uma viga submetida a uma flexão simples é:

$$\begin{aligned} \frac{M}{EI} &= \frac{d^2v}{dx^2} \\ v'' &= \frac{M}{EI} \end{aligned}$$

$$EI.v'' = M \quad (2.20)$$

2.2 Estruturas Isostáticas e Estruturas Hiperestáticas

Nessa seção do trabalho, serão discutidos os conceitos de estruturas isostáticas e estruturas hiperestáticas. Essa discussão é pertinente uma vez que, o método em discussão nesse trabalho de conclusão de curso, é responsável por determinar os esforços internos de estruturas hiperestáticas e, portanto, para se promover uma compreensão mais efetiva do tema, é necessário, inicialmente, que seja definido esse tipo de estrutura.

2.2.1 Estruturas Isostáticas

As estruturas isostáticas são aquelas em que o número de reações é estritamente necessário para que seja impedido qualquer movimento de translação e rotação do sistema quando este está submetido a um conjunto de carregamentos externos. Em outras palavras, é possível concluir que as reações estão eficazmente dispostas de forma a restringir os possíveis movimentos da estrutura.

São definidas como estruturas isostáticas:

- Estruturas em que o número de reações é igual ao número de equações de Equilíbrio da Estática (somatório de forças na direção x, somatório de forças na direção y e somatório dos momentos em qualquer ponto da estrutura iguais a zero);
- Estruturas em que o número de reações é superior ao número de equações de Equilíbrio da Estática, entretanto com liberação criteriosa de ligações entre os possíveis elementos da estrutural global.

Vale ressaltar que, além das equações de equilíbrio da Estática, são necessárias equações complementares em número igual ao excesso de incógnitas encontradas no problema em estudo. Estas equações complementares são definidas a partir das referidas liberações introduzidas no sistema estrutural que surgem com instalação de rótulas.

Rótulas, por sua vez, garantem a liberação total da rotação da seção transversal, restringindo apenas as translações já impedidas pelos apoios localizados na linha de atuação desse elemento estrutural. As rótulas asseguram a obtenção de momento fletor nulo na seção, uma vez não geram nenhuma restrição de rotação na seção em que elas se encontram. Nesses casos, a introdução criteriosa desse número adequado de rótulas garante a isostaticidade da estrutura.

2.2.2 Estruturas Hiperestáticas

Segundo Romão (2002-2003), as estruturas hiperestáticas são aquelas que apresentam o número de reações superior ao estritamente necessário para impedir os vários tipos de movimento que podem surgir quando esforços externos agem sobre elas. Para que a Análise Estrutural seja possível, há a necessidade de se utilizar teorias complementares junto com as equações de equilíbrio para torna-se viável a obtenção dos esforços internos que surgem nas estruturas. Tais teorias complementares dão origem aos vários métodos conhecidos para se analisar estruturalmente sistemas hiperestáticos. São alguns conhecidos:

- Método de Cross;
- Método das Forças;
- Método dos Deslocamentos;
- Método da Equação dos Três Momentos.

Todos os métodos de análise estrutural acima citados, utilizam-se o Princípio da Superposição dos Efeitos para transformar as estruturas hiperestáticas, em estruturas isostáticas equivalentes. Dessa forma, as equações da Estática passam a ser suficientes para analisar estruturalmente esses tipos de sistemas.

Em estruturas hiperestáticas, define-se como grau de hiperestaticidade do sistema, o número de ligações que podem ser suprimidas de forma a que a estrutura se torne isostática. Logo, de um modo geral, o grau de hiperestaticidade pode ser equacionado da seguinte forma:

$$\text{grau de hiperestaticidade} = n^{\circ} \text{ de reações} - n^{\circ} \text{ de rótulas} - 3 \quad (2.21)$$

Assim, é possível afirmar que todas as estruturas isostáticas apresentam grau de hiperestaticidade nulo e que para estruturas hiperestáticas, esse parâmetro apresenta apenas valores positivos.

É objeto de estudo desse trabalho de conclusão de curso, o Método de Equação dos Três Momentos.

2.3 O Método da Equação dos Três Momentos

Nessa seção será definido matematicamente a dedução do Método da Equação dos Três Momentos.

2.3.1 Rotação em Função de um Momento M Aplicado Sobre o Apoio

Para se obter a dedução da Equação dos Três Momentos, é necessário definir a equação que determina a rotação de qualquer seção transversal de uma viga biapoiada submetida a um momento fletor no primeiro apoio.

Para isso, admite-se o modelo estrutural ilustrado pela Figura 8.

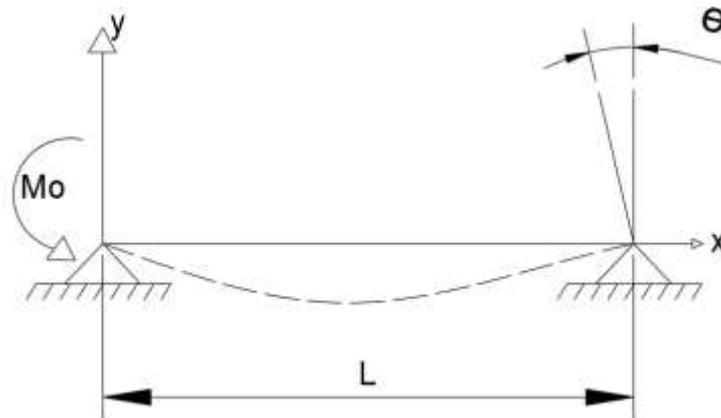


Figura 8: Viga biapoiada submetida a um momento na extremidade

A equação que se determina o momento fletor dessa viga biapoiada é:

$$M(x) = M_o - \frac{M_o}{L} x \quad (2.22)$$

Para se obter a equação da inclinação da linha elástica, basta resolver a equação diferencial da linha elástica Equação (2.20) já deduzida na seção 2.1.5 desse presente trabalho. Assim tem-se:

$$EIv'' = M$$

$$v'' = \frac{M}{EI}$$

Considerando que não há variação do módulo de elasticidade do material bem como do momento de inércia da seção transversal ao longo do comprimento da viga é possível determinar a equação da inclinação da linha elástica por:

$$v' = \frac{1}{EI} \int M(x) dx \quad (2.23)$$

Substituindo a Equação (2.22) na Equação (2.23), tem-se:

$$v' = \frac{1}{EI} \int \left(M_o - \frac{M_o}{L} x \right) dx$$

$$v' = \frac{1}{EI} \left(M_o x - \frac{M_o}{2L} x^2 + C_1 \right)$$

Com o objetivo de se obter o valor da constante C_1 , faz-se necessário a obtenção da equação da linha elástica, aplicando as seguintes condições de contorno:

- Para $x=0$, $v=0$
- Para $x=L$; $v=0$

Assim tem-se:

$$v = \frac{1}{EI} \int \left(M_o x - \frac{M_o}{2L} x^2 + C_1 \right) dx$$

$$v = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_o x^2}{2} - \frac{M_o}{6L} x^3 + C_1 x + C_2 \right) \quad (2.24)$$

Para $x=0$, $v=0$ é possível desenvolver:

$$0 = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_o 0^2}{2} - \frac{M_o}{6L} 0^3 + C_1 0 + C_2 \right)$$

$$C_2 = 0 \quad (2.25)$$

Para $x=L$ e $v=0$, tem-se:

$$0 = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_o L^2}{2} - \frac{M_o}{6L} L^3 + C_1 L + 0 \right)$$

$$0 = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_o L^2}{2} - \frac{M_o L^2}{6} + C_1 L + 0 \right)$$

$$0 = \frac{1}{EI} \left(\frac{3M_o L^2 - M_o L^2}{6} + C_1 L + 0 \right)$$

$$0 = \left(\frac{M_o L^2}{3} + C_1 L + 0 \right)$$

$$C_1 = -\frac{M_o L}{3} \quad (2.26)$$

Assim, a equação que determina a inclinação da linha elástica é dada por, substituindo as Equações (2.26) e (2.25) na Equação (2.24):

$$v' = \frac{1}{EI} \left(M_o x - \frac{M_o}{2L} x^2 - \frac{M_o L}{3} \right)$$

$$v' = \frac{M_o}{6LEI} (6Lx - 3x^2 - 2L^2) \quad (2.27)$$

2.3.2 O Desenvolvimento da Dedução da Equação dos Três Momentos

Considere a viga contínua submetida aos carregamentos externos e com modo de elasticidade constante ao longo de todo o seu comprimento como mostrado na Figura 9.

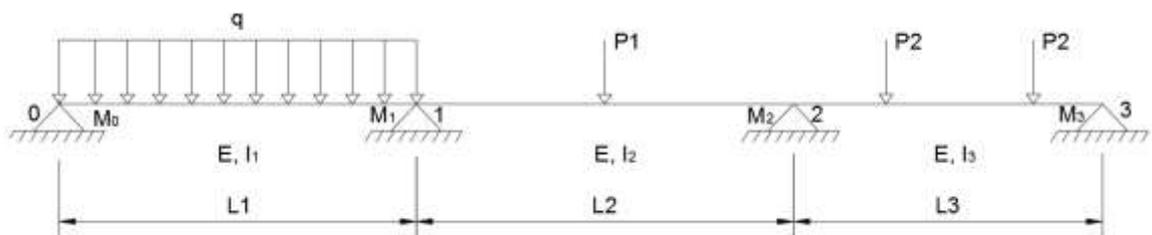


Figura 9: Modelo estrutural proposto

Para facilitar a compreensão do Método da Equação dos Três Momentos será definido um conjunto de variáveis como disposto na figura acima:

- Primeiro apoio será o apoio 0 (zero) com momento atuante M_0 , o segundo, apoio 1 com momento atuante M_1 e assim sucessivamente;
- Primeiro vão de comprimento L_1 e momento de inércia I_1 , o segundo vão de comprimento L_2 e momento de inércia I_2 e assim sucessivamente.

São hipóteses básicas para a aplicação desse método:

- Viga hiperestática contínua de eixo contínuo e horizontal;
- Todos os apoios capazes de absorver cargas verticais;
- Viga indeformável considerando esforços axiais.

Com o objetivo de se aplicar a Equação dos Três Momentos, será necessário dividir viga contínua, considerando sempre dois a dois os vão subjacentes. Para que seja possível admitir essa divisão, nos apoios intermediários surgirão momentos aplicados para garantir a equivalência estrutural do sistema. Dessa forma serão obtidos os seguintes vãos:

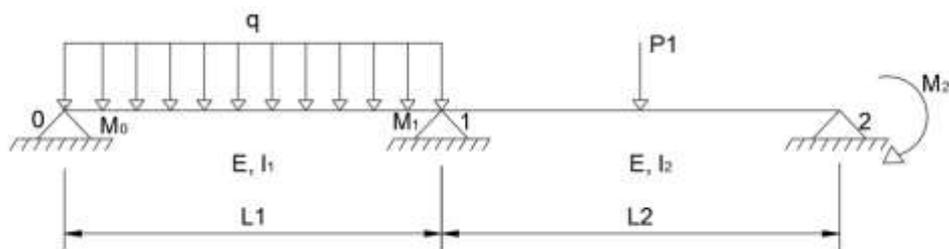


Figura 10: Agrupamento de vãos (vão 1 e vão 2)

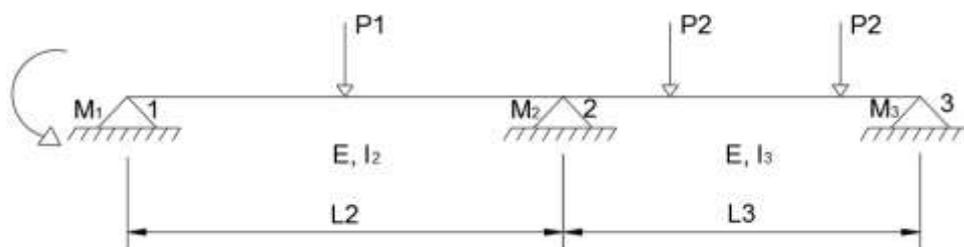


Figura 11: Agrupamento de vãos (vão 2 e vão 3)

De um modo geral, será considerada a seguinte viga para realizar a dedução do método.

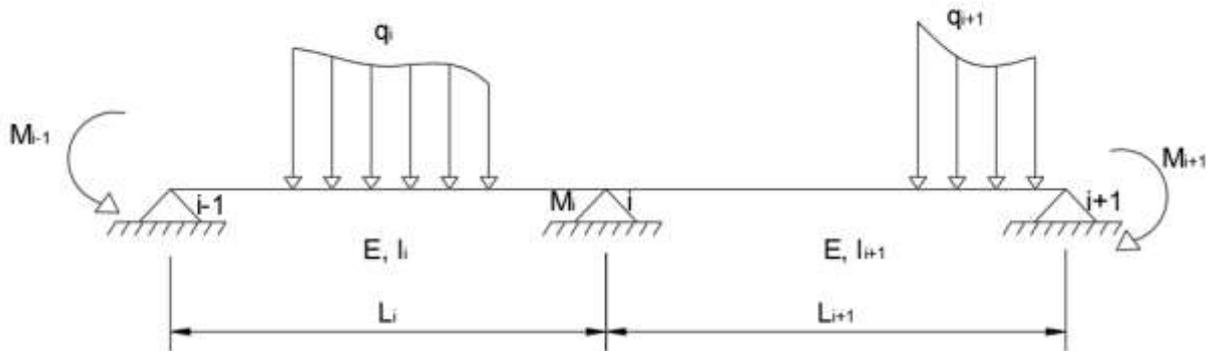


Figura 12: Modelo estrutural genérico

A partir da atuação desses carregamentos, a viga passará a assumir uma configuração deformada semelhante a apresentada na Figura 13.

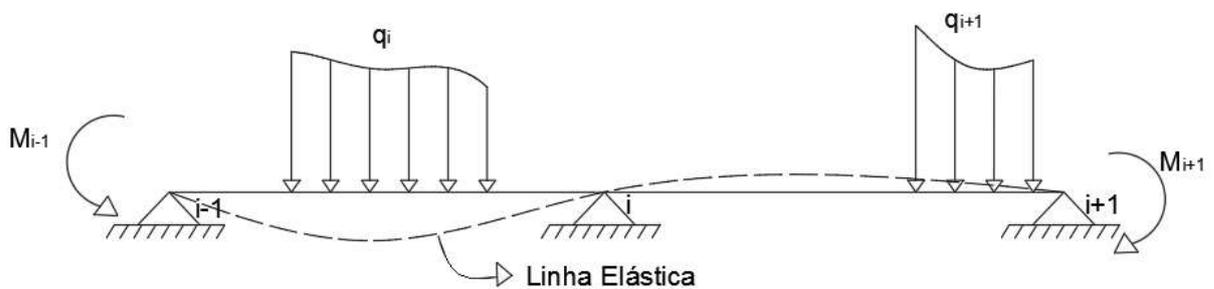


Figura 13: Configuração deformada do modelo estrutural genérico

É importante ressaltar que a inclinação da linha elástica imediatamente a esquerda do apoio i é numericamente igual à inclinação da linha elástica imediatamente a direita do apoio, como mostrado na Figura 14.

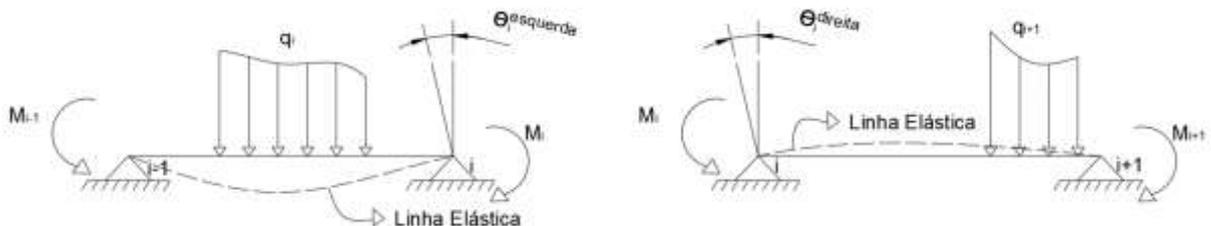


Figura 14: Vãos divididos para aplicação da Equação dos Três Momentos

Portanto é possível afirmar que a equação de compatibilidade é descrita por:

$$\theta_i^{esquerda} = -\theta_i^{direita} \quad (2.28)$$

Com o objetivo de analisar os efeitos responsáveis por causar as rotações $\theta_i^{esquerda}$ e $\theta_i^{direita}$ na seção em estudo, será analisado, individualmente, cada vão, e, verificado as parcelas da rotação que surge em função de cada carregamento individual. Com o auxílio da Teoria de Superposição de Efeitos finalmente será possível discriminar as equações para cada rotação.

Inicialmente será determinada a equação para a rotação $\theta_i^{esquerda}$. É compreensível aceitar que os agentes contribuintes para a rotação são:

- Momento M_{i-1} aplicado sobre o apoio $i-1$;
- Carregamento q_i ;
- Momento M_i , aplicado sobre o apoio i .

As seções seguintes desenvolverão todos os cálculos para se obter a parcela de rotação que surge em função de cada um dos carregamentos acima descritos.

2.3.3 Rotação em Função do Momento Fletor M_{i-1} Aplicado Sobre o Apoio $i-1$

Uma vez definido a equação da inclinação da seção transversal em função de um momento aplicado na extremidade, deduzido na seção 2.3.1, fica-se determinado que a parcela de rotação gerada por esse carregamento na seção i será o valor obtido a partir dessa equação, assumindo para x o valor de L_i . Dessa forma, tem-se:

$$v'(x) = \frac{M_o}{6LEI} (6Lx - 3x^2 - 2L^2)$$

$$v'(x = L_i) = \frac{M_{i-1}}{6L_iEI} (6L_i^2 - 3L_i^2 - 2L_i^2)$$

$$v'(x = L_i) = \frac{M_{i-1}L_i}{6EI} \quad (2.29)$$

2.3.4 Rotação em Função do Momento Fletor M_i Aplicado Sobre o Apoio i

A parcela de rotação que surge em função da aplicação do momento M_i sobre a seção i da viga é numericamente igual ao valor obtido a partir da equação deduzida na seção 2.3.1, assumindo para x o valor de 0 (zero). Portanto, tem-se:

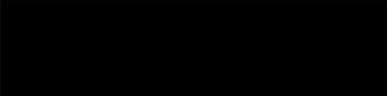
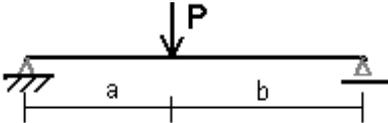
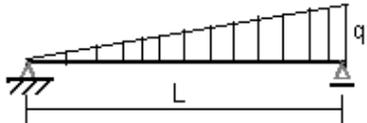
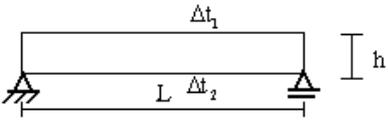
$$\begin{aligned}v'(x) &= \frac{M_o}{6LEI} (6Lx - 3x^2 - 2L^2) \\v'(x = 0) &= \frac{M_i}{6L_iEI} (6L_i \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 - 2L_i^2) \\v'(x = 0) &= \frac{2M_iL_i^2}{6L_iEI} \\v'(x = 0) &= \frac{M_iL_i}{3EI} \tag{2.30}\end{aligned}$$

2.3.5 Rotação em Função de Qualquer Tipo de Carregamento Intermediário Aplicado ao Longo do Vão

As parcelas da rotação proveniente da atuação de carregamentos intermediários ao longo do vão da viga são expressões definidas a partir da mesma metodologia de cálculo utilizado na seção 2.3.1. Para isso, muitos estudiosos de Mecânica dos Sólidos e Análise Estrutural, com o auxílio da equação diferencial da linha elástica, definiu os valores das rotações em função das mais diferenciadas formas de carregamento atuantes nas estruturas, e assim, determinaram os valores de K_1 e K_2 . Os valores de K_1 são a parcela da rotação da seção transversal i proveniente da atuação dos carregamentos intermediários no vão 1 multiplicados pelo coeficiente de rigidez à flexão da viga em estudo. Já os valores de K_2 são a parcela da rotação da seção transversal i proveniente da atuação dos carregamentos intermediários do vão 2 multiplicados pelo coeficiente de rigidez à flexão da viga em estudo.

Sendo foi obtido a seguinte tabela com os respectivos valores de K_1 e K_2 :

Tabela 1: Coeficientes K1 e K2 da Equação dos Três Momentos

Carregamento	K_1	K_2
<p>q (N/m)</p> 	$\frac{qL^3}{24}$	$\frac{qL^3}{24}$
	$\frac{M(L^2 - 3a^2)}{6L}$	$-\frac{M(L^2 - 3b^2)}{6L}$
	$\frac{Pa(L^2 - a^2)}{6L}$	$\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6L}$
	$\frac{qL^3}{45}$	$\frac{7qL^3}{360}$
	$\frac{7qL^3}{360}$	$\frac{qL^3}{45}$
	$K_1 = K_2 = \frac{E\alpha L(\Delta t_2 - \Delta t_1)}{2h}$	

Fonte: (Martins, 1991)

2.3.6 Cálculo Final da Rotação $\theta_i^{esquerda}$

Após o cálculo de cada parcela de rotação provenientes da atuação dos carregamentos acima discutidos e utilizando o Princípio da Superposição de Efeitos, pode-se definir a rotação da seção i, esquerda como sendo:

$$\theta_i^{esquerda} = \frac{M_{i-1}L_i}{6EI} + \frac{M_iL_i}{3EI} + \frac{K_1}{EI} \quad (2.31)$$

2.3.7 Cálculo Final da Rotação $\theta_i^{direita}$

Utilizando a mesma metodologia de cálculo apresentada até então, é possível obter, também, a equação que determina a rotação da seção i,direita proveniente dos carregamentos ao longo do vão i+1 que pode ser expressada por:

$$\theta_i^{direita} = \frac{M_{i+1}L_{i+1}}{6EI} + \frac{M_iL_{i+1}}{3EI} + \frac{K_2}{EI} \quad (2.32)$$

2.3.8 Desenvolvimento Final da Equação dos Três Momentos

Por fim, ao se retomar a Equação de Compatibilidade (2.28) e substituir as Equações (2.32) e (2.31), é possível concluir que:

$$\theta_i^{esquerda} = -\theta_i^{direita}$$
$$\frac{M_{i-1}L_i}{6EI} + \frac{M_iL_i}{3EI} + \frac{K_1}{EI} = -\left(\frac{M_iL_{i+1}}{3EI} + \frac{M_{i+1}L_{i+1}}{6EI} + \frac{K_2}{EI}\right)$$
$$\frac{M_{i-1}L_i}{6EI} + \frac{M_iL_i}{3EI} + \frac{K_1}{EI} = -\frac{M_iL_{i+1}}{3EI} - \frac{M_{i+1}L_{i+1}}{6EI} - \frac{K_2}{EI}$$

Considerando que os vãos apresentam a mesma rigidez a flexão, é compreensível então multiplicar todos os termos da equação por 6EI. Assim, tem-se:

$$M_{i-1}L_i + 2M_iL_i + 6K_1 = -2M_iL_{i+1} - M_{i+1}L_{i+1} - 6K_2$$

Reorganizando de forma satisfatória a relação acima, tem-se finalmente que a equação que rege o método da Equação dos Três Momentos é:

$$M_{i-1}L_i + 2M_i(L_i + L_{i+1}) + M_{i+1}L_{i+1} = -6(K_1 + K_2) \quad (2.33)$$

2.4 Efeito Térmico

Variações de temperatura não provocam esforços internos em um sistema isostático. Isso acontece porque a estrutura isostática apresenta um número exato de vínculos para ser estável e, portanto, sempre sofrerá ajustes a medida em que o sistema apresentar modificações no comprimento (dilatação ou encurtamento) dos elementos que o compõe. Em outras palavras, pode-se imaginar que uma estrutura estaticamente determinada não sofre resistência para se acomodar uma barra que

sofreu pequena modificação ao longo do seu comprimento devido a uma variação de temperatura, uma vez que a estrutura isostática, sem aquele elemento, se configurará em um mecanismo. Fato é que, a variação de temperatura provoca deslocamentos sem que apareçam esforços em uma estrutura isostática.

Por outro lado, variações dessa natureza em estruturas estaticamente indeterminadas provocam deformações e esforços internos no sistema. Essas solicitações, por sua vez, são de grande importância em estruturas hiperestáticas porque podem assumir valores, dependendo da variação da temperatura, superiores as tensões provocadas por ação de carregamentos externos.

Nessa seção do trabalho, será apresentado todo o desenvolvimento de cálculo de afim de se obter a equação da linha elástica considerando apenas diferenças de temperatura entre as fibras superiores e inferiores de vigas.

2.4.1 A Linha Elástica Para Efeitos Térmicos

Inicialmente, considere o exemplo simples de uma viga biapoiada, de comprimento L , que tem suas fibras superiores submetidas a uma temperatura T_s , e as fibras inferiores a uma temperatura T_i , como ilustrado na figura abaixo. Considere também que a viga possui um coeficiente de dilatação térmica igual a α cuja unidade de medida é dada por $^{\circ}\text{C}$, conforme ilustrado na Figura 15.

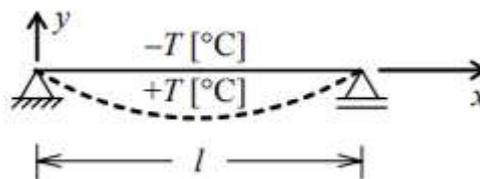


Figura 15: Viga biapoiada submetida a uma variação de temperatura

Fonte: (Martha, Métodos Básicos da Análise de Estruturas, 2010)

Estando a viga submetida à variação de temperatura descrita, pode-se afirmar que ela será flexionada conforme a Figura 16.

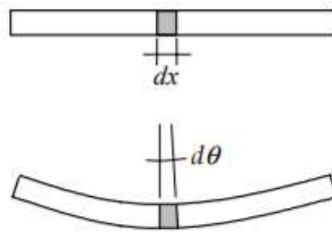


Figura 16: Viga flexionada em função da variação de temperatura

Fonte: (Martha, Métodos Básicos da Análise de Estruturas, 2010)

Tomando como referência um elemento infinitesimal dx , é possível perceber que as fibras superiores e inferiores da barra sofrem variações diferentes de temperatura conforme a Figura 17.

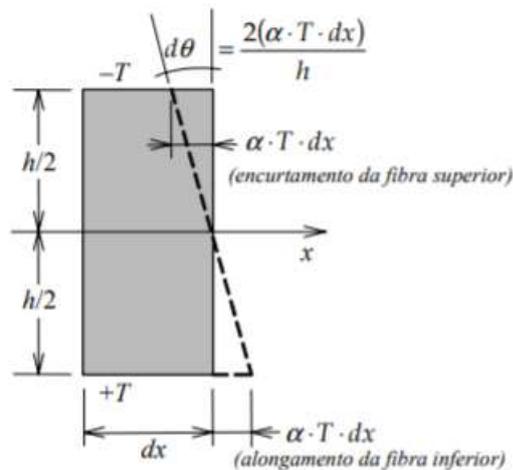


Figura 17: Seção transversal da viga submetida à variação da temperatura

Fonte: (Martha, Métodos Básicos da Análise de Estruturas, 2010)

Para que seja possível a obtenção dos deslocamentos relativos internos devidos a uma variação genérica de temperatura, é necessário considerar as seguintes hipóteses:

- Não há deslocamento horizontal relativo devido à variação de temperatura;
- A temperatura varia linearmente ao longo da altura da seção transversal (da fibra inferior para a fibra superior). A consequência principal desta hipótese reside no fato de que a seção transversal da barra permanecerá plana com a variação de temperatura, como vez que se considera o material homogêneo.

- É sabido também que a variação do comprimento ΔL em função da variação da temperatura é dado por $\alpha L(T_f - T_i)$, sendo T_f , a temperatura final, T_i .

Sendo assim, a partir da Figura 17: Seção transversal da viga submetida à variação da temperatura, a equação que relaciona as variações dos comprimentos das fibras e o ângulo de curvatura $d\theta$ é dada por:

$$\operatorname{tg}(d\theta) = \frac{2(\alpha \cdot \Delta T \cdot dx)}{h} \quad (2.34)$$

Considerando que $d\theta$ é um ângulo muito pequeno, pode-se aproximar por:

$$\operatorname{tg}(d\theta) \approx d\theta \quad (2.35)$$

Logo, a equação da linha elástica para casos de variação da temperatura, conforme hipóteses descritas acima é:

$$d\theta = \frac{2(\alpha \cdot \Delta T \cdot dx)}{h}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{2\alpha(T_s - T_i)}{h} \quad (2.36)$$

2.5 Apoios Elásticos e a Equação dos Três Momentos

Quando a viga contínua e hiperestática está sobre apoios elásticos, a Equação dos Três Momentos pode ser usada, entretanto com acréscimo de termos responsáveis por influenciar na rotação das seções transversais. Esses termos por sua vez, faz surgir outros dois momentos na Equação dos Três Momentos já estudado nesse presente trabalho.

Seja a viga contínua e hiperestática da Figura 18: **Viga genérica sobre apoios deformáveis** Depois da aplicação de um carregamento genérico, os apoios da viga não permanecem no mesmo nível. Como medida de simplificação, supõe que os apoios se deformam conforme a Figura 19: **Deslocamentos da viga sobre apoios deformáveis**.

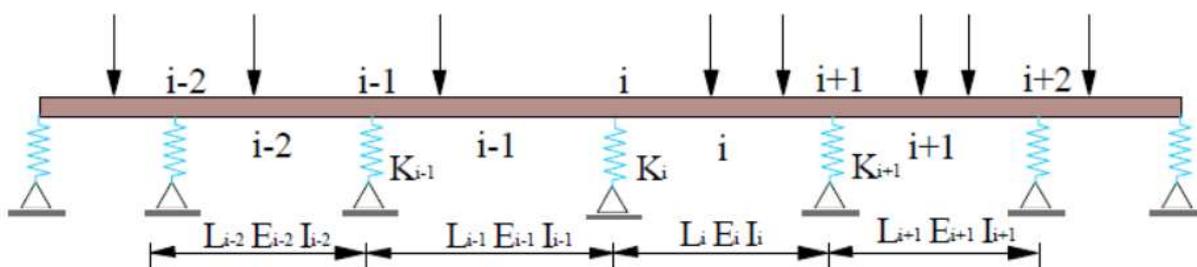


Figura 18: Viga genérica sobre apoios deformáveis

Fonte: (Silva, 2004)

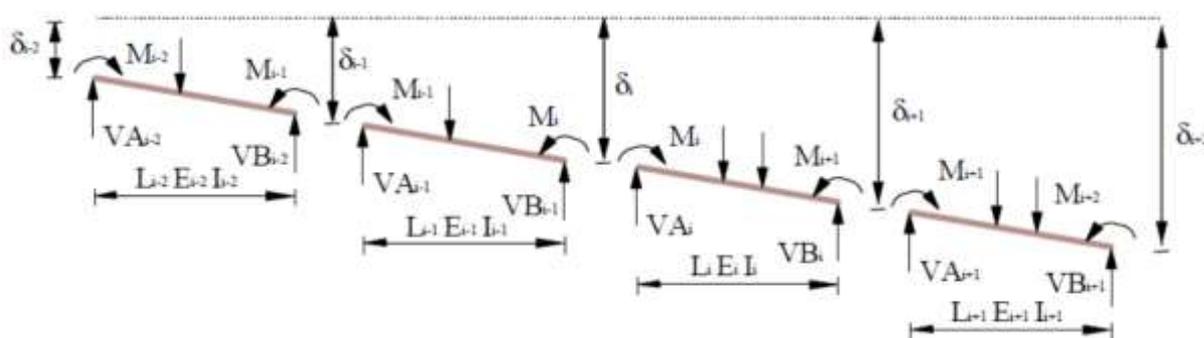


Figura 19: Deslocamentos da viga sobre apoios deformáveis

Fonte: (Silva, 2004)

Quando a viga se encontra sobre apoios deformáveis, no cálculo das constantes K_1 e K_2 , deve-se levar em consideração os recalques dos apoios, portanto, somam-se aos valores das constantes, calculados em consequência dos carregamentos atuantes nos vãos $i-1$ e i , as seguintes expressões Martins (1991):

$$K_1^* = -\frac{EI\delta}{L} \quad (2.37)$$

$$K_2^* = \frac{EI\delta}{L} \quad (2.38)$$

Ou:

$$K_1^* = -\frac{E_{i-1}I_{i-1}}{L_{i-1}}(\delta_i - \delta_{i-1}) \quad (2.39)$$

$$K_1^* = -\frac{E_i I_i}{L_i}(\delta_{i+1} - \delta_i) \quad (2.40)$$

Partindo do princípio de que os apoios seguem a “Lei de Hooke” ($F=kx$), e obedecendo a nomenclatura da Figura 19: **Deslocamentos da viga sobre apoios deformáveis**, obtém-se:

$$\delta_{i-1} = \frac{VB_{i-2} + VA_{i-1}}{k_{i-1}} \quad (2.41)$$

$$\delta_i = \frac{VB_{i-1} + VA_i}{k_i} \quad (2.42)$$

$$\delta_{i+1} = \frac{VB_i + VA_{i+1}}{k_{i+1}} \quad (2.43)$$

Vale ressaltar que as reações VA e VB dependem do carregamento atuante no vão e das reações provenientes dos momentos fletores nos apoios. Assumindo como RA e RB as reações que surgem em função do carregamento, é possível escrever:

$$VB_{i-2} = RB_{i-2} + \frac{M_{i-2} - M_{i-1}}{L_{i-1}} \quad (2.44)$$

$$VA_{i-1} = RA_{i-1} + \frac{M_i - M_{i-1}}{L_{i-1}} \quad (2.45)$$

$$VB_{i-1} = RB_{i-1} + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_{i-1}} \quad (2.46)$$

$$VA_i = RA_i + \frac{M_{i+1} - M_i}{L_i} \quad (2.47)$$

$$VB_i = RB_i + \frac{M_i - M_{i+1}}{L_i} \quad (2.48)$$

$$VA_{i+1} = RA_{i+1} + \frac{M_{i+2} - M_{i+1}}{L_{i+1}} \quad (2.49)$$

Substituindo das equações acima apresentadas nas Equações (2.37) e (2.38), pode-se escrever:

$$K_1^* = -\frac{E_{i-1}I_{i-1}}{L_{i-1}} \left[\frac{1}{K_i} \left(RB_{i-1} + \frac{M_{i-1} - M_{i-1}}{L_{i-1}} + RA_i + \frac{M_{i+1} - M_i}{L_i} \right) - \left(\frac{1}{K_{i-1}} \left(RB_{i-2} + \frac{M_{i-2} - M_{i-1}}{L_{i-2}} + RA_{i-1} + \frac{M_i - M_{i-1}}{L_{i-1}} \right) \right) \right] \quad (2.50)$$

$$K_2^* = \frac{E_i I_i}{L_i} \left[\frac{1}{K_{i+1}} \left(RB_i + \frac{M_i - M_{i+1}}{L_i} + RA_{i+1} + \frac{M_{i+2} - M_{i+1}}{L_i} \right) - \left(\frac{1}{K_i} \left(RB_{i-1} + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_{i-1}} + RA_i + \frac{M_{i+1} - M_i}{L_i} \right) \right) \right] \quad (2.51)$$

Por fim, adicionando as Equações (2.50) e (2.51) à Equação dos Três Momentos, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{6}{L_{i-1}L_{i-2}K_{i-1}} M_{i-2} - \frac{6}{L_{i-1}} \left(\frac{1}{L_{i-1}K_i} + \frac{1}{L_{i-2}K_{i-1}} + \frac{1}{L_{i-1}K_{i-1}} + \frac{1}{L_i K_i} - \frac{L_{i-1}^2}{L_{i-1}K_i} \right) M_{i-1} + \\ & + 6 \left(\frac{1}{L_{i-1}^2 K_i} + \frac{1}{L_i L_{i-1} K_i} + \frac{1}{L_{i-1}^2 K_{i-1}} + \frac{1}{L_i^2 K_{i+1}} + \frac{1}{L_i L_{i-1} K_i} + \frac{1}{L_i^2 K_i} + \frac{1}{3E_{i-1}I_{i-1}} + \frac{1}{3E_i I_i} \right) M_i + \\ & - \frac{6}{L_i} \left(\frac{1}{L_{i-1}K_i} + \frac{1}{L_i K_{i+1}} + \frac{1}{L_{i+1}K_{i+1}} + \frac{1}{L_i K_i} - \frac{L_i^2}{6E_i I_i} \right) M_{i+1} + \frac{6}{L_i L_{i+1} K_{i+1}} M_{i+2} = \\ & = -6 \left(\frac{K_1}{E_{i-1}I_{i-1}} + \frac{K_2}{E_i I_i} - \frac{RB_{i-1} + RA_i}{L_{i-1}K_i} + \frac{RB_{i-2} + RA_{i-1}}{L_{i-1}K_{i-1}} + \frac{RB_i + RA_{i+1}}{L_i K_{i+1}} - \frac{RB_{i-1} + RA_i}{L_i K_i} \right) \end{aligned}$$

3 METODOLOGIA

3.1 O Modelo Estrutural

O modelo estrutural utilizado para o desenvolvimento desse trabalho é o ilustrado na Figura 20.

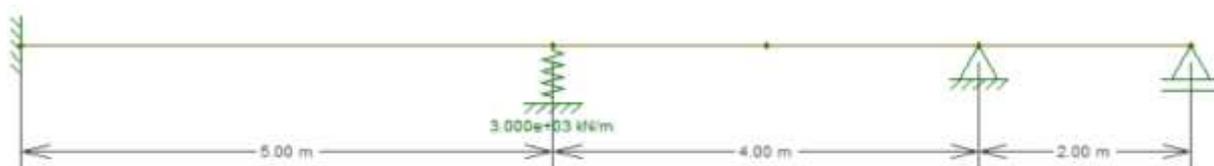


Figura 20: Modelo estrutural utilizado para validação do programa

A viga em estudo apresenta as seguintes propriedades para efeito de cálculo e servirão de entrada para os programas que serão utilizados para efetuarem a análise estrutural dos problemas propostos:

- Vão 1: Engastado e apoiado
- Vão 2 e vão 3: Biapoiado
- Um apoio deformável com $k = 3,00 \times 10^3$ kN/m
- Rigidez à flexão (EI) constante ao longo da viga ($N.m^2$): $1,15 \times 10^7$
- Coeficiente de dilatação térmica ($/^\circ C$): $\alpha = 12 \times 10^{-6}$
- Coeficiente de Poisson: $\nu = 0,20$
- Dimensões da seção transversal ao longo do comprimento da viga



Figura 21: Seção transversal adotada

Vale ressaltar que, para efeitos de cálculos, o modelo estrutural equivalente utilizado pelo programa a fim de se aplicar a Equação dos Três Momentos se difere do proposto em função da presença do engaste. Nesse caso, o apoio de terceiro gênero é substituído por um vão biapoiado cuja seção transversal apresenta rigidez a flexão infinita e comprimento qualquer, não causando nenhum tipo de interferência no resultado da viga estudada. Veja o modelo de cálculo utilizado:

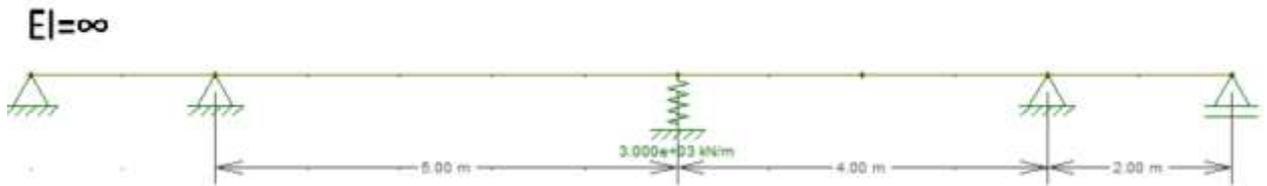


Figura 22: Modelo estrutural que será idealizado pelo programa

3.2 Natureza dos Carregamentos

A fim de se validar o resultado gerado a partir da análise estrutural, serão modelados computacionalmente a estrutura com os seguintes carregamentos:

- Carregamento externo

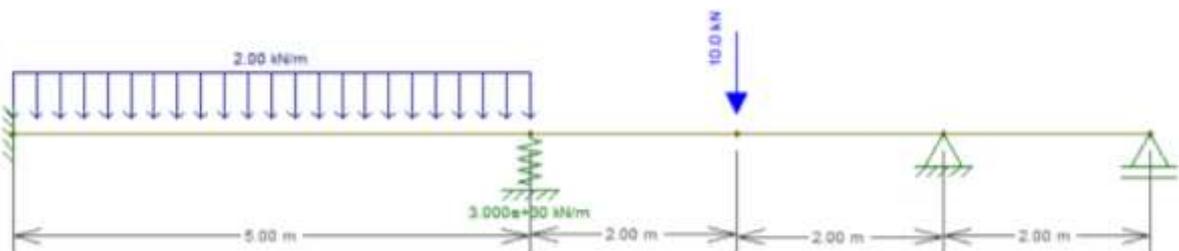


Figura 23: Carregamento externo aplicado

- Variação da temperatura

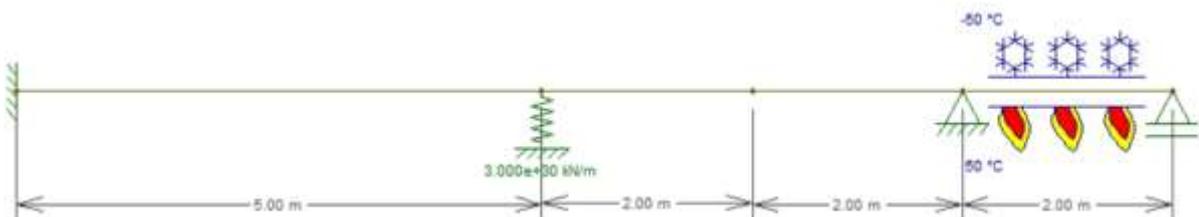


Figura 24: Viga submetida a variação da temperatura

- Carregamento externo aplicado e variação da temperatura

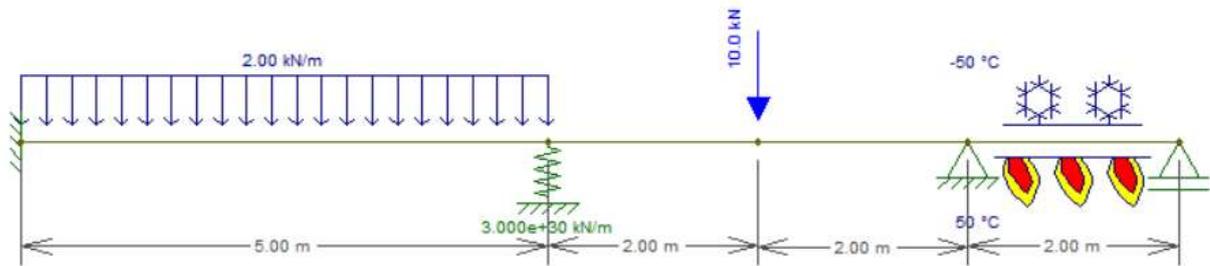


Figura 25: Carregamento externo aplicado e variação da temperatura

3.3 Entrada de Dados (FORTRAN)

A entrada de dados para o programa desenvolvido pelo Professor Doutor Jaime Florencio Martins segue as etapas para cada um dos modelos propostos. Para a entrada de dados considere as seguintes unidades de medidas para cada uma das propriedades da viga.

Carregamentos distribuídos: N/m

Carregamentos concentrados: N

Coeficiente de rigidez à flexão (EI): N/m²

Comprimento dos vãos: m

Altura da viga: m

Temperatura: °C

Coeficiente de dilatação térmica: /°C

Coeficiente da mola: N/m

Código do Tipo de apoio das extremidades: Engaste: 2 e demais apoios: 0

- Para o modelo estrutural 1

```

C:\Users\Paulo Henrique\Desktop\TCC II\Fortran - Para executar\viga.exe
DIGITE O NUMERO DE APOIOS =
4
DIGITE O NUMERO DE UAOS COM UARIACAO DA TEMPERATURA:
0
DIGITE O NUMERO DE APOIOS ELASTICOS:
1
DIGITE O NUMERO DE APOIOS COM RECALQUE:
0
  CARREGAMENTO NO UAO:          1
  NUMERO DE CARGAS CONCENTRADAS:
0
  NUMERO DE CARGAS UNIFORMES:
1

  CARREGAMENTO NO UAO:          2
  NUMERO DE CARGAS CONCENTRADAS:
1
  NUMERO DE CARGAS UNIFORMES:
0

  CARREGAMENTO NO UAO:          3
  NUMERO DE CARGAS CONCENTRADAS:
0
  NUMERO DE CARGAS UNIFORMES:
0

```

Figura 26: (a) Entrada de dados do modelo 1

```

C:\Users\Paulo Henrique\Desktop\TCC II\Fortran - Para executar\viga.exe
  COMPRIMENTO DO UAO:          1
5
  RIGIDEZ EI DO UAO:           1
1.15e7

  COMPRIMENTO DO UAO:          2
4
  RIGIDEZ EI DO UAO:           2
1.15e7

  COMPRIMENTO DO UAO:          3
2
  RIGIDEZ EI DO UAO:           3
1.15e7

  VALOR DA CARGA UNIFOR DISTRB. DO UAO:          1
2000
  UAO:          2   VALOR DA CARGA CONCENTRADA:          1
10000
  DISTANCIA DA FORCA ATE O APOIO ESQUERDO (a):
2
  INFORME O NOMEERO DO APOIO ELASTICO:
2
  CONSTANTE DO MOLA DO APOIO:          2
3000000

```

Figura 27: (b) Entrada de dados do modelo 1

```
C:\Users\Paulo Henrique\Desktop\TCC II\Fortran - Para executar\viga.exe
IDENTIFICACAO DOS APOIS EXTERNOS
APOIO SIMPLES :CODIGO 0 - ENGASTE: CODIGO 2
CODIGO DO APOIO 1:
2
CODIGO DO APOIO:      4
0
```

Figura 28: (c) Entrada de dados do modelo 1

- Para o modelo estrutural 2

```
C:\Users\Paulo Henrique\Desktop\TCC II\Fortran - Para executar\viga.exe
DIGITE O NUMERO DE APOIOS =
4
DIGITE O NUMERO DE UAOS COM VARIACAO DA TEMPERATURA:
1
DIGITE O NUMERO DE APOIOS ELASTICOS:
1
DIGITE O NUMERO DE APOIOS COM RECALQUE:
0
CARREGAMENTO NO UAO:      1
NUMERO DE CARGAS CONCENTRADAS:
0
NUMERO DE CARGAS UNIFORMES:
0
CARREGAMENTO NO UAO:      2
NUMERO DE CARGAS CONCENTRADAS:
0
NUMERO DE CARGAS UNIFORMES:
0
CARREGAMENTO NO UAO:      3
NUMERO DE CARGAS CONCENTRADAS:
0
NUMERO DE CARGAS UNIFORMES:
0
```

Figura 29: (a) Entrada de dados do modelo 2

```
C:\Users\Paulo Henrique\Desktop\TCC II\Fortran - Para executar\viga.exe
  COMPRIMENTO DO UAO:          1
5
RIGIDEZ EI DO UAO:            1
1.15e7

  COMPRIMENTO DO UAO:          2
4
RIGIDEZ EI DO UAO:            2
1.15e7

  COMPRIMENTO DO UAO:          3
2
RIGIDEZ EI DO UAO:            3
1.15e7

UAOS COM UARIACAO DA TEMPERATURA
UAO:
3
VALOR DA TEMPERATURA NA FACE SUPERIOR:
-50
VALOR DA TEMPERATURA NA FACE INFERIOR:
50
ALTURA DA UIGA H:
0.30
```

Figura 30: (b) Entrada de dados do modelo 2

```
C:\Users\Paulo Henrique\Desktop\TCC II\Fortran - Para executar\viga.exe
COEFICIENTE DE DILATAAO TERMICA (alfa):
12e-6
INFORME O NÙMERO DO APOIO ELASTICO:
2
CONSTANTE DO MOLA DO APOIO:          2
30000000

IDENTIFICACAO DOS APOIS EXTERNOS
APOIO SIMPLES :CODIGO 0 - ENGASTE: CODIGO 2
CODIGO DO APOIO 1:
2
CODIGO DO APOIO:          4
0
```

Figura 31: (c) Entrada de dados do modelo 2

- Para o modelo estrutural 3

```

C:\Users\Paulo Henrique\Desktop\TCC II\Fortran - Para executar\viga.exe
DIGITE O NUMERO DE APOIOS =
4
DIGITE O NUMERO DE UAOS COM UARIACAO DA TEMPERATURA:
1
DIGITE O NUMERO DE APOIOS ELASTICOS:
1
DIGITE O NUMERO DE APOIOS COM RECALQUE:
0
CARREGAMENTO NO UAO:          1
NUMERO DE CARGAS CONCENTRADAS:
0
NUMERO DE CARGAS UNIFORMES:
1
CARREGAMENTO NO UAO:          2
NUMERO DE CARGAS CONCENTRADAS:
1
NUMERO DE CARGAS UNIFORMES:
0
CARREGAMENTO NO UAO:          3
NUMERO DE CARGAS CONCENTRADAS:
0
NUMERO DE CARGAS UNIFORMES:
0

```

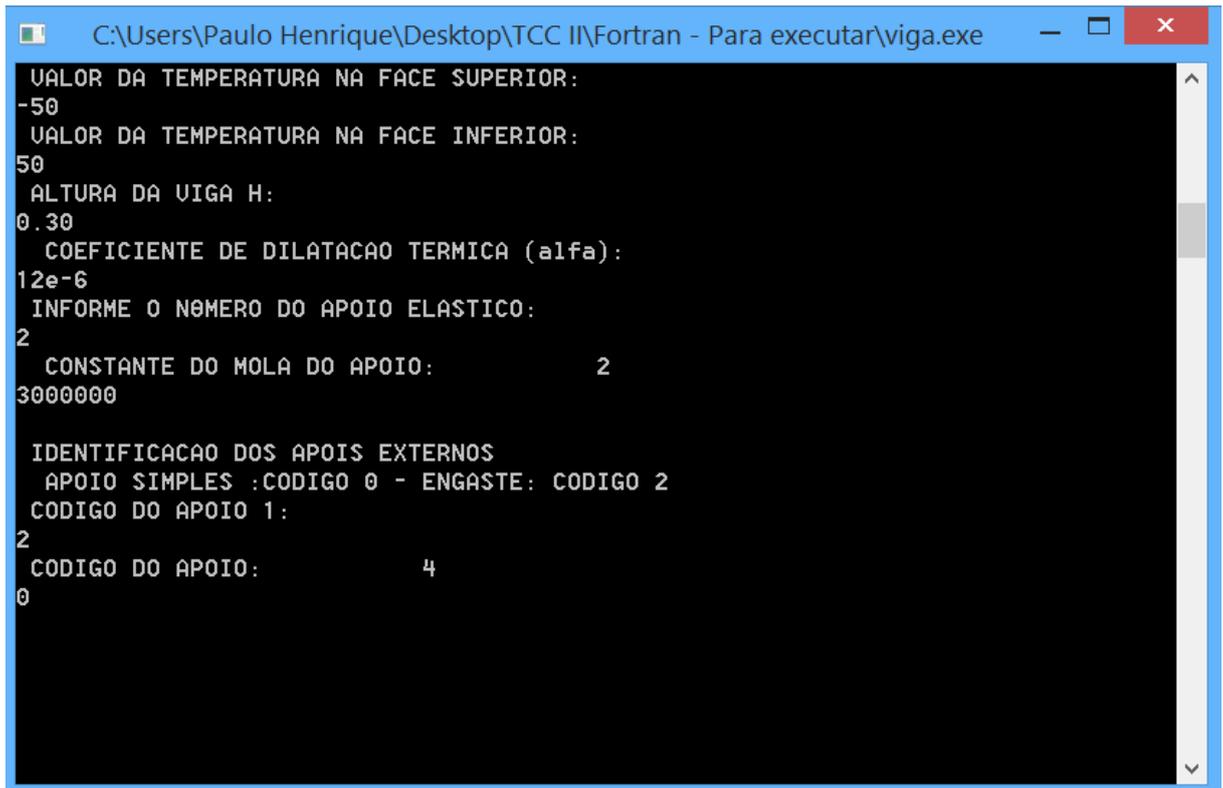
Figura 32: (a) Entrada de dados do modelo 3

```

C:\Users\Paulo Henrique\Desktop\TCC II\Fortran - Para executar\viga.exe
COMPRIMENTO DO UAO:          1
5
RIGIDEZ EI DO UAO:           1
1.15e7
COMPRIMENTO DO UAO:          2
4
RIGIDEZ EI DO UAO:           2
1.15e7
COMPRIMENTO DO UAO:          3
2
RIGIDEZ EI DO UAO:           3
1.15e7
VALOR DA CARGA UNIFOR DISTRB. DO UAO:          1
2000
UAO:          2   VALOR DA CARGA CONCENTRADA:          1
10000
DISTANCIA DA FORCA ATE O APOIO ESQUERDO (a):
2
UAOS COM UARIACAO DA TEMPERATURA
UAO:
3

```

Figura 33: (b) Entrada de dados do modelo 3



```
C:\Users\Paulo Henrique\Desktop\TCC II\Fortran - Para executar\viga.exe
VALOR DA TEMPERATURA NA FACE SUPERIOR:
-50
VALOR DA TEMPERATURA NA FACE INFERIOR:
50
ALTURA DA VIGA H:
0.30
COEFICIENTE DE DILATAÇÃO TERMICA (alfa):
12e-6
INFORME O NÚMERO DO APOIO ELASTICO:
2
CONSTANTE DO MOLLA DO APOIO:          2
3000000

IDENTIFICAÇÃO DOS APOIS EXTERNOS
APOIO SIMPLES :CODIGO 0 - ENGASTE: CODIGO 2
CODIGO DO APOIO 1:
2
CODIGO DO APOIO:          4
0
```

Figura 34: (c) Entrada de dados do modelo 3

3.4 Resultado da Simulação (FORTRAN)

Os relatórios referentes aos resultados fornecido pelo programa se encontram como apêndices desse presente trabalho.

3.5 Diagramas de Momento Fletor e Esforço Cortante

Em posse dos momentos fletores e reações de apoio das vigas registradas nos relatórios obtidos a partir do programa, foi possível desenhar os seguintes diagramas dos esforços internos e reações de apoio dos modelos.

- Do modelo estrutural 1 – Momento fletor

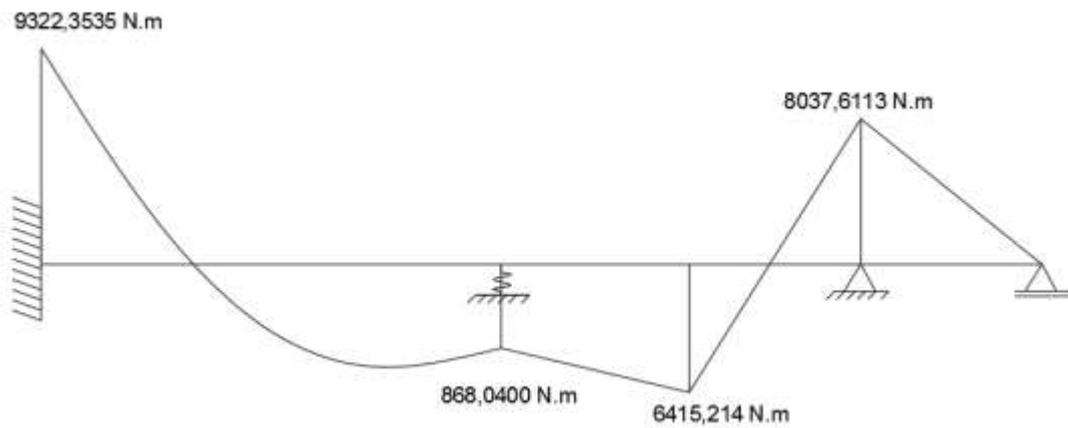


Figura 35: Diagrama do momento fletor do modelo estrutural 1

- Do modelo estrutural 1 – Esforço Cortante

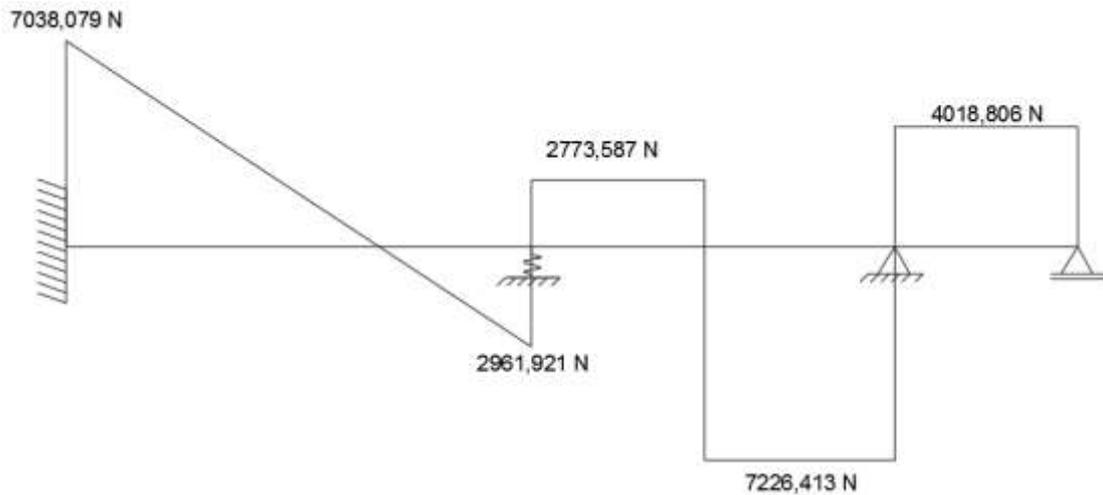


Figura 36: Diagrama do esforço cortante do modelo estrutural 1

- Do modelo estrutural 1 – Reações de Apoio

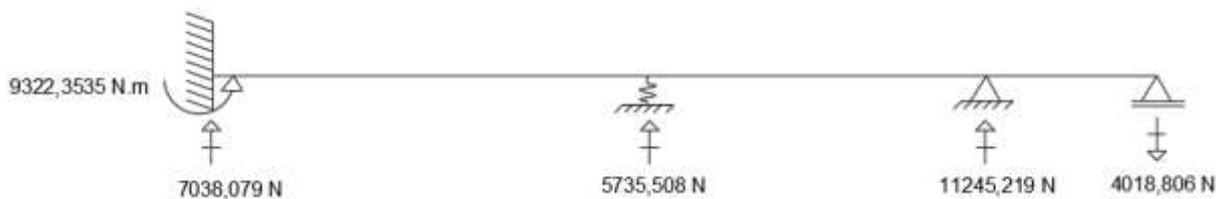


Figura 37: Reações de apoio do modelo estrutural 1

- Do modelo estrutural 2 – Momento fletor

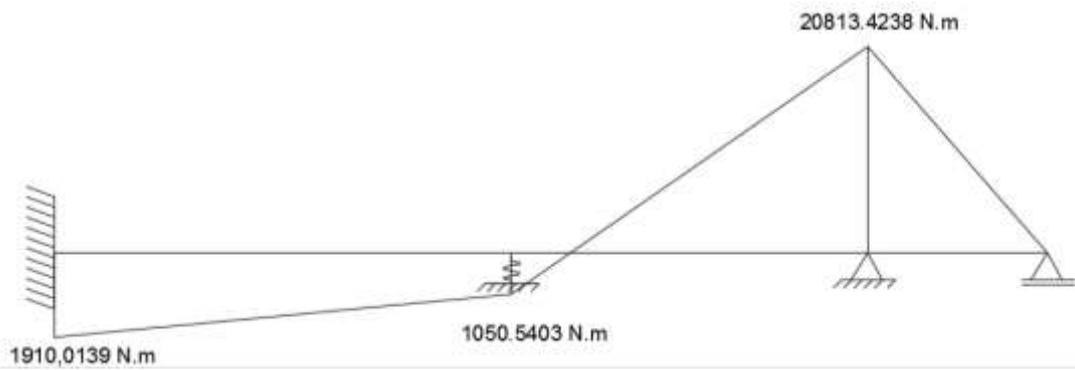


Figura 38: Diagrama do momento fletor do modelo estrutural 2

- Do modelo estrutural 2 – Esforço Cortante

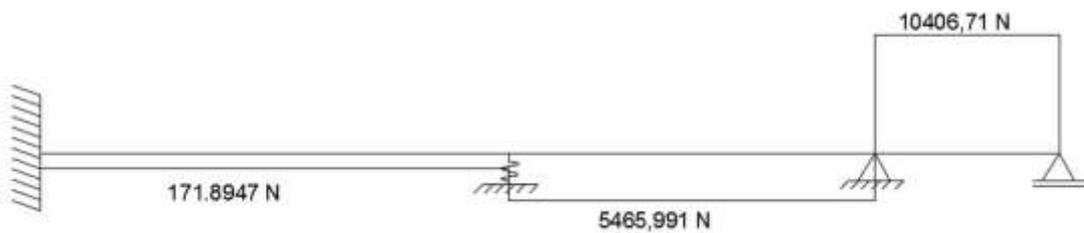


Figura 39: Diagrama do esforço cortante do modelo estrutural 2

- Do modelo estrutural 2 – Reações de Apoio

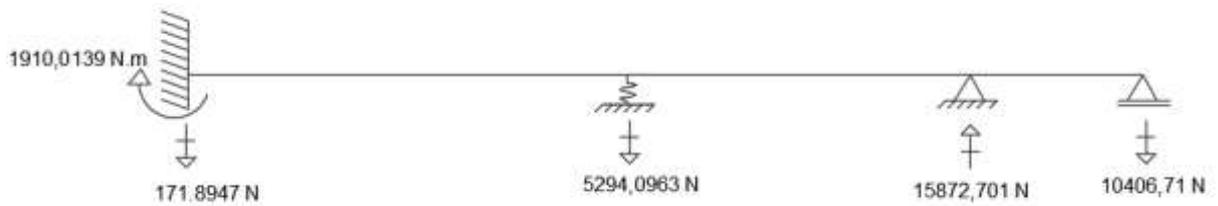


Figura 40: Reações de apoio do modelo estrutural 2

- Do modelo estrutural 3 – Momento fletor

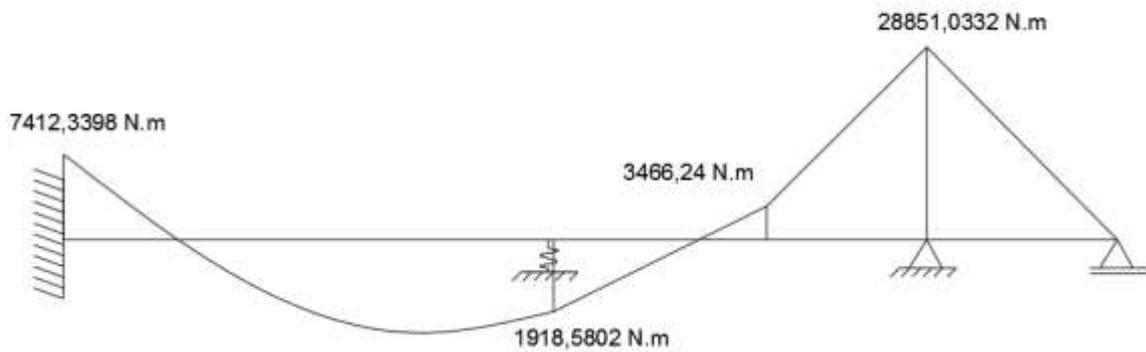


Figura 41: Diagrama do momento fletor do modelo estrutural 3

- Do modelo estrutural 3 – Esforço Cortante

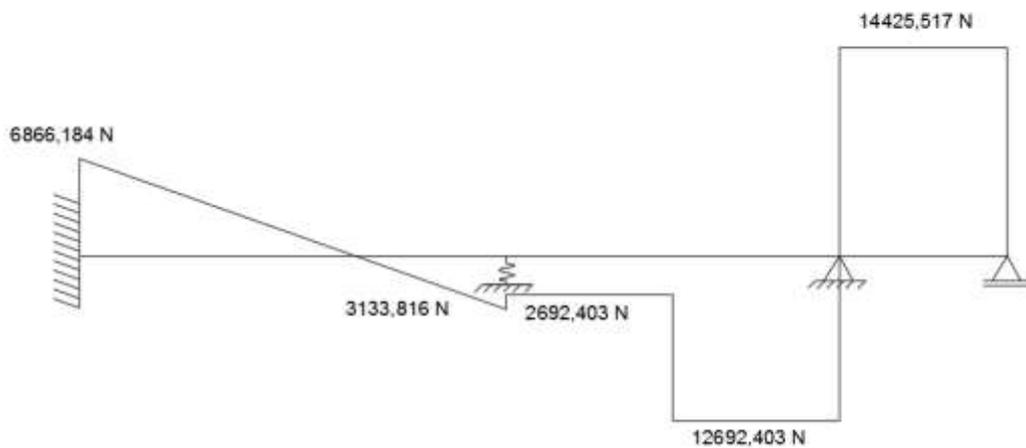


Figura 42: Diagrama do esforço cortante do modelo estrutural 3

- Do modelo estrutural 3 – Reações de Apoio

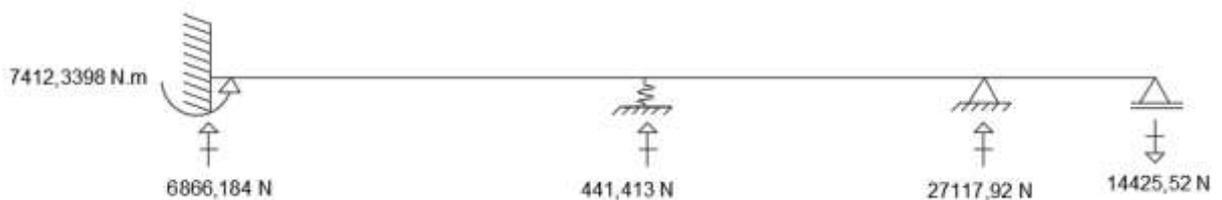


Figura 43: Reações de apoio do modelo estrutural 3

3.6 Entrada de Dados no F-Tool

3.6.1 Modelando a Estrutura

Para que seja possível fazer a validação dos resultados calculados pelo programa desenvolvido pelo Professor Doutor Jaime Florencio, será utilizado o programa F-Tool com o objetivo de se obter os resultados dos modelos propostos e assim comparar com os anteriormente encontrados.

Inicialmente, foi-se desenhado o comprimento do eixo da viga (11 metros) com o auxílio da ferramenta *Insert member* do Ftool, conforme ilustrado na Figura 44.

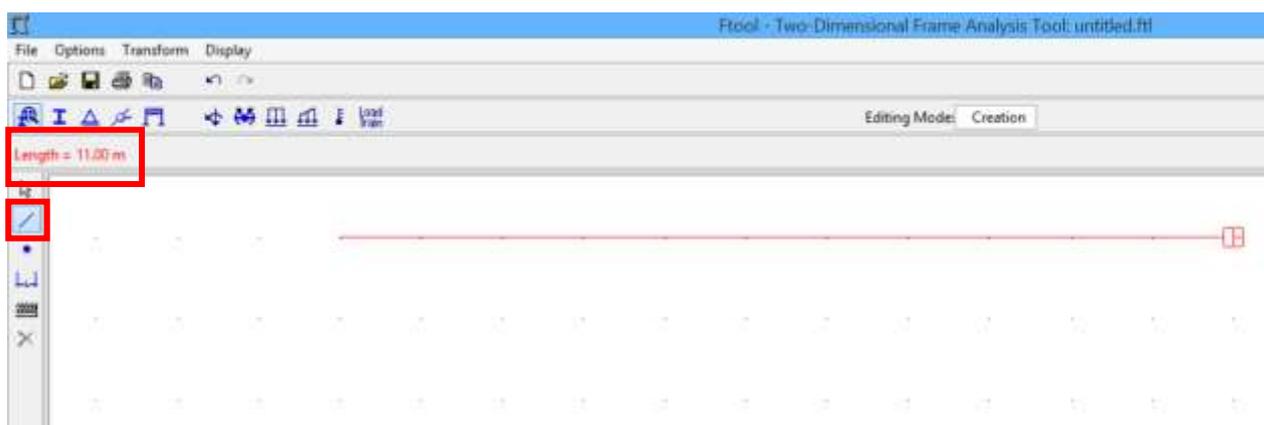


Figura 44: Desenhando o comprimento total da viga

Em seguida, com o auxílio da ferramenta *Insert node*, foi-se determinado, ao longo do comprimento da viga, os pontos importantes da estrutura. São considerados pontos importantes aqueles que contém cargas pontuais aplicadas, início e fim de

carregamentos distribuídos bem como pontos onde estão localizados os apoios do sistema. Dessa forma, tem-se:

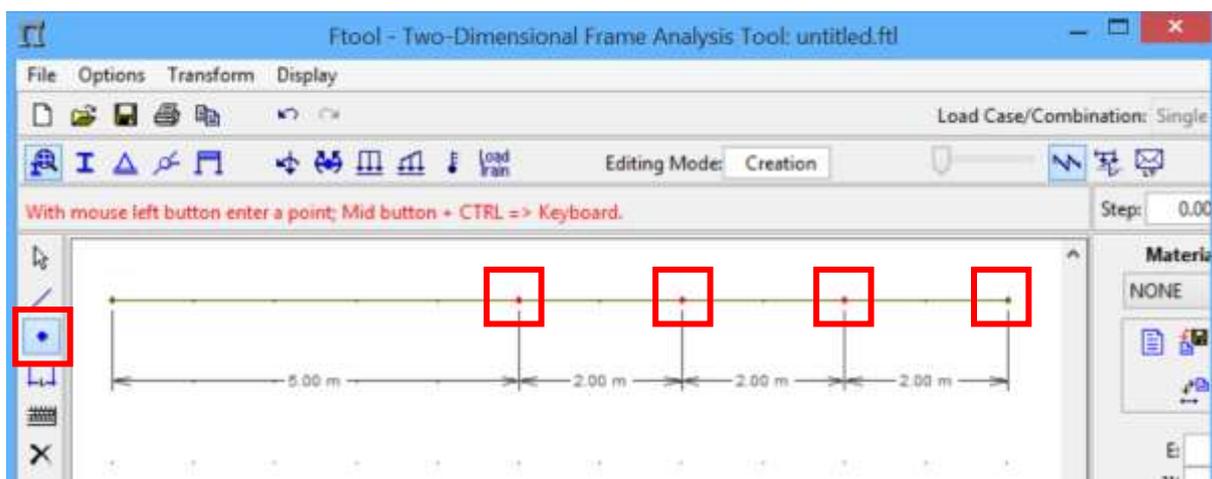


Figura 45: Localização dos pontos importantes da estrutura

O próximo passo, foi realizada a identificação e localização dos apoios ao longo do comprimento da viga. Para isso, fez-se o uso da ferramenta *Support conditions*. O primeiro apoio, da esquerda para direita, se trata de um engaste. Esse apoio por sua vez tem as seguintes propriedades mecânicas:

- Restrição de deslocamento na direção x;
- Restrição de deslocamento na direção y;
- Restrição de rotação da seção transversal;
- Para se aplicar o apoio em uma posição mais confortável, será aplicado uma rotação de -90° .

Essas informações deverão ser informadas no programa na Aba de *Support Conditions* para que seja compreendido que se trata de um engaste. Sendo assim, obtém-se:

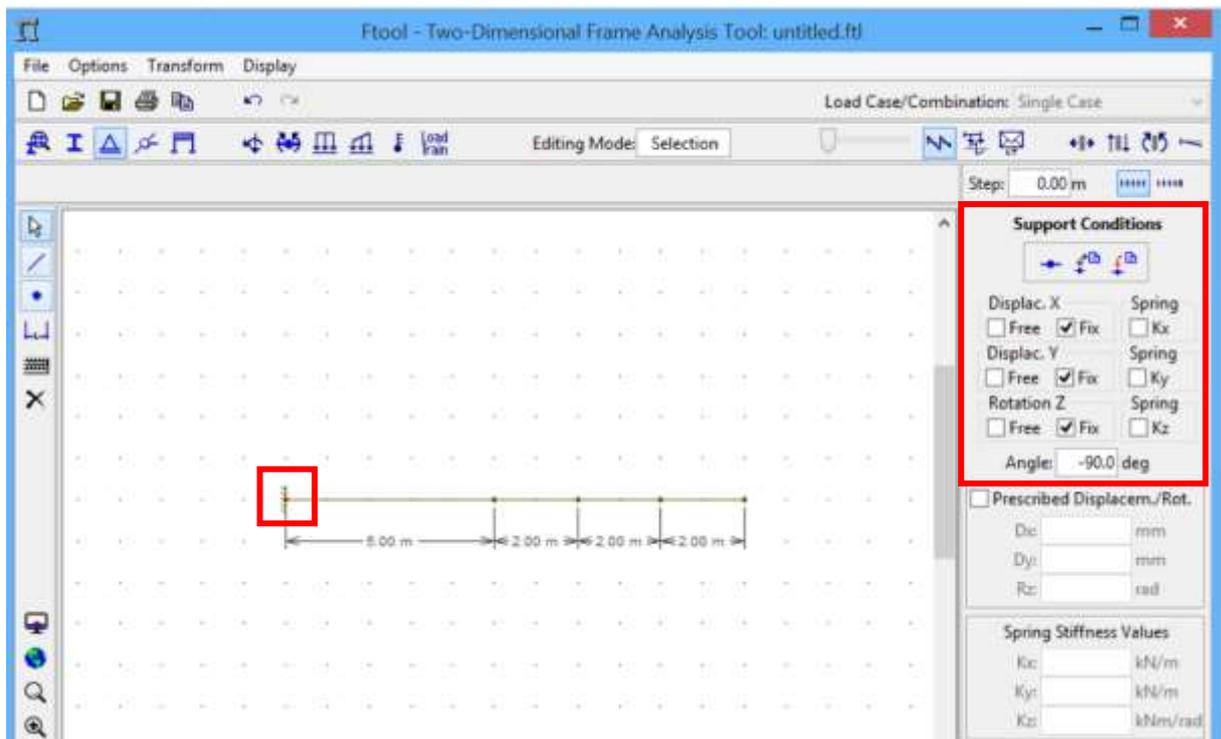


Figura 46: Aplicação do engaste no primeiro apoio

O próximo apoio a ser aplicado se trata de um apoio elástico de primeiro gênero que apresenta as seguintes propriedades mecânicas:

- Deslocamento na direção x livre;
- Deslocamento parcial na direção y com a constante de elástica (K_y) igual a: $3,00 \times 10^3$ kN/m;
- Rotação da seção transversal livre.

Sendo assim, tem-se:

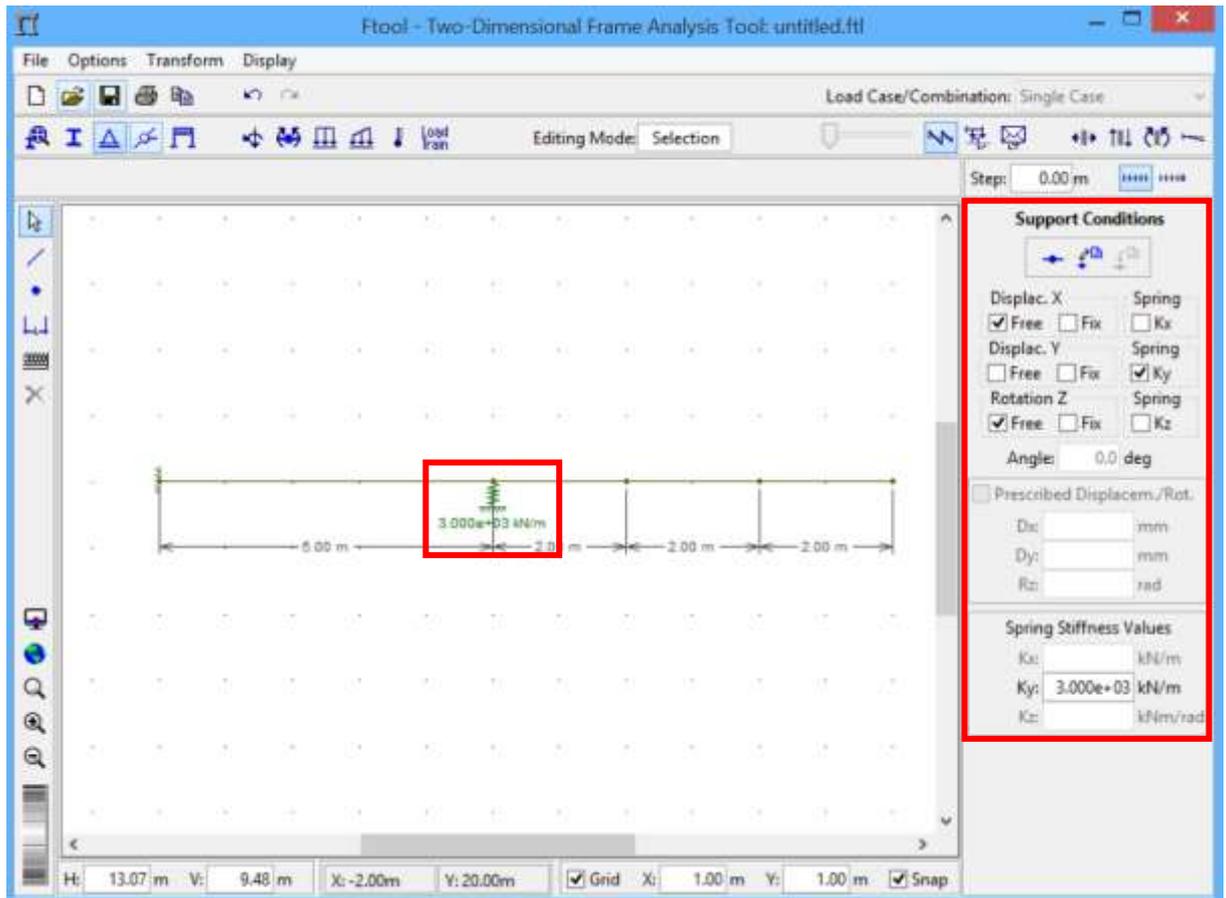


Figura 47: Aplicação do apoio elástico

Na sequência, o próximo apoio a ser aplicado é do segundo gênero que assume as seguintes propriedades mecânicas:

- Restrição do deslocamento na direção x;
- Restrição de deslocamento na direção y;
- Rotação da seção livre.

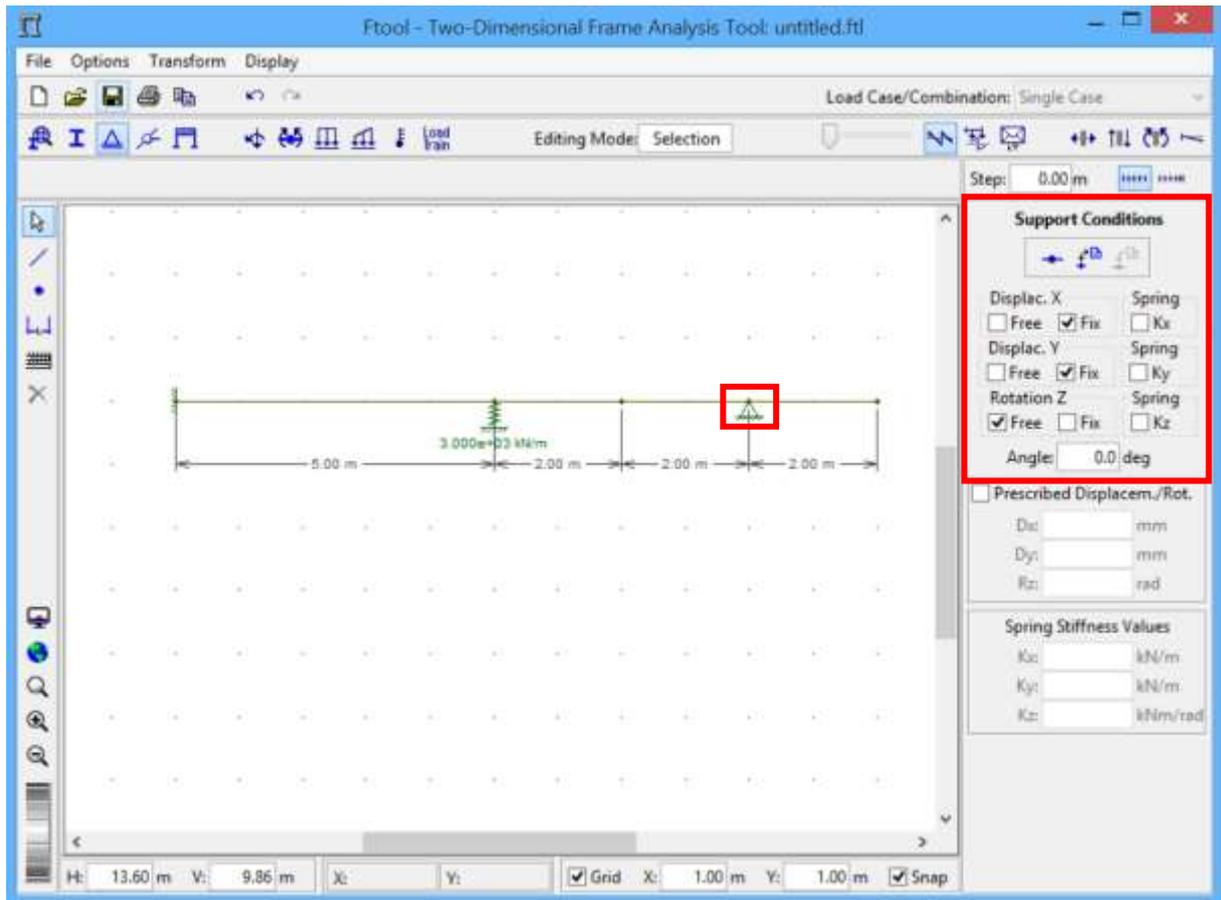


Figura 48: Aplicação do apoio de segundo gênero

Por fim, o último apoio a ser aplicado se trata de um apoio do primeiro gênero que apresenta as seguintes propriedades mecânicas:

- Deslocamento na direção x livre;
- Restrição de deslocamento na direção y;
- Rotação da seção livre.

Assim, obtém-se:

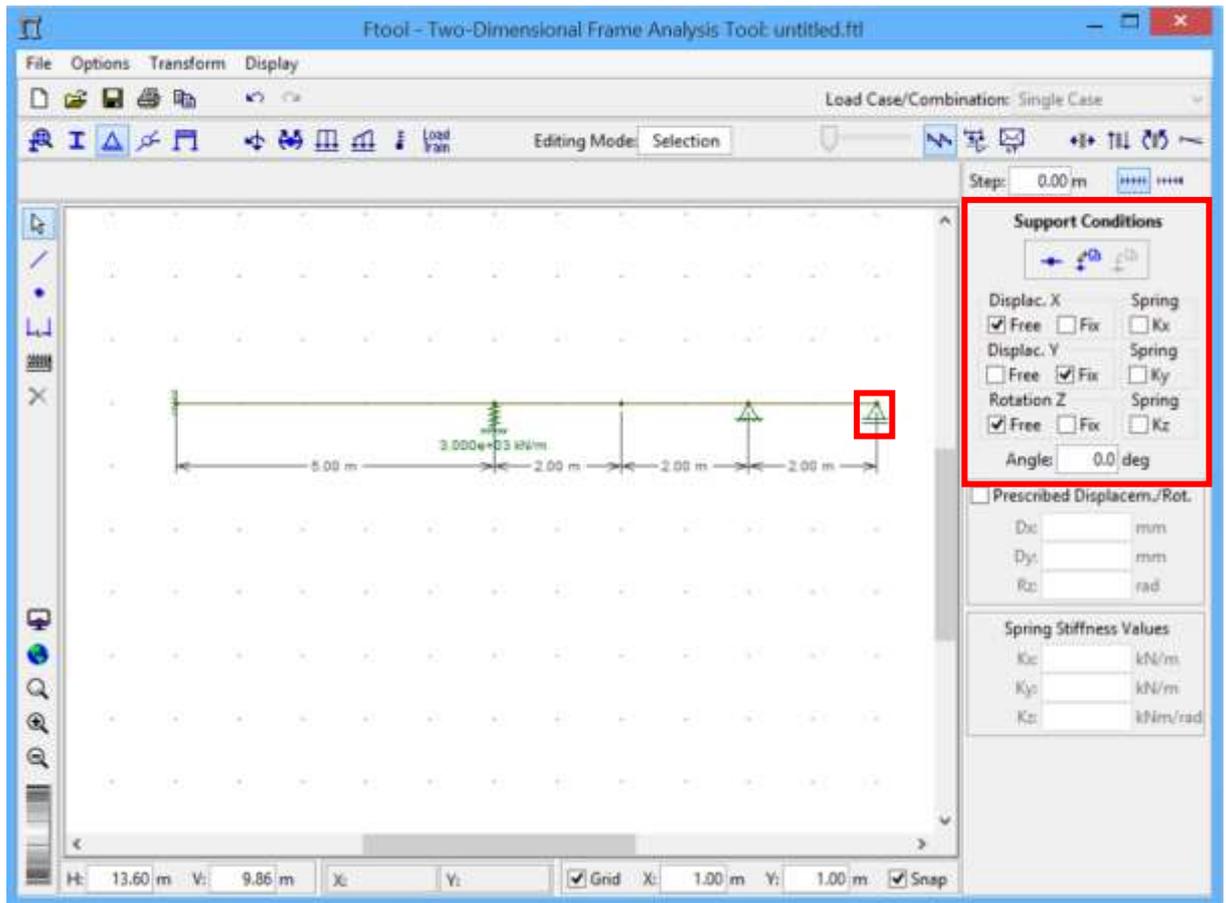


Figura 49: Aplicação do apoio de primeiro gênero

3.6.1.1 Definindo a Seção Transversal da Viga

Para se definir a seção transversal faz-se necessário o uso da ferramenta *Section properties*. De acordo com as informações descritas na seção 3.1, definiu-se, assim, no programa, as propriedades geométricas da seção transversal, como mostra a Figura 50:

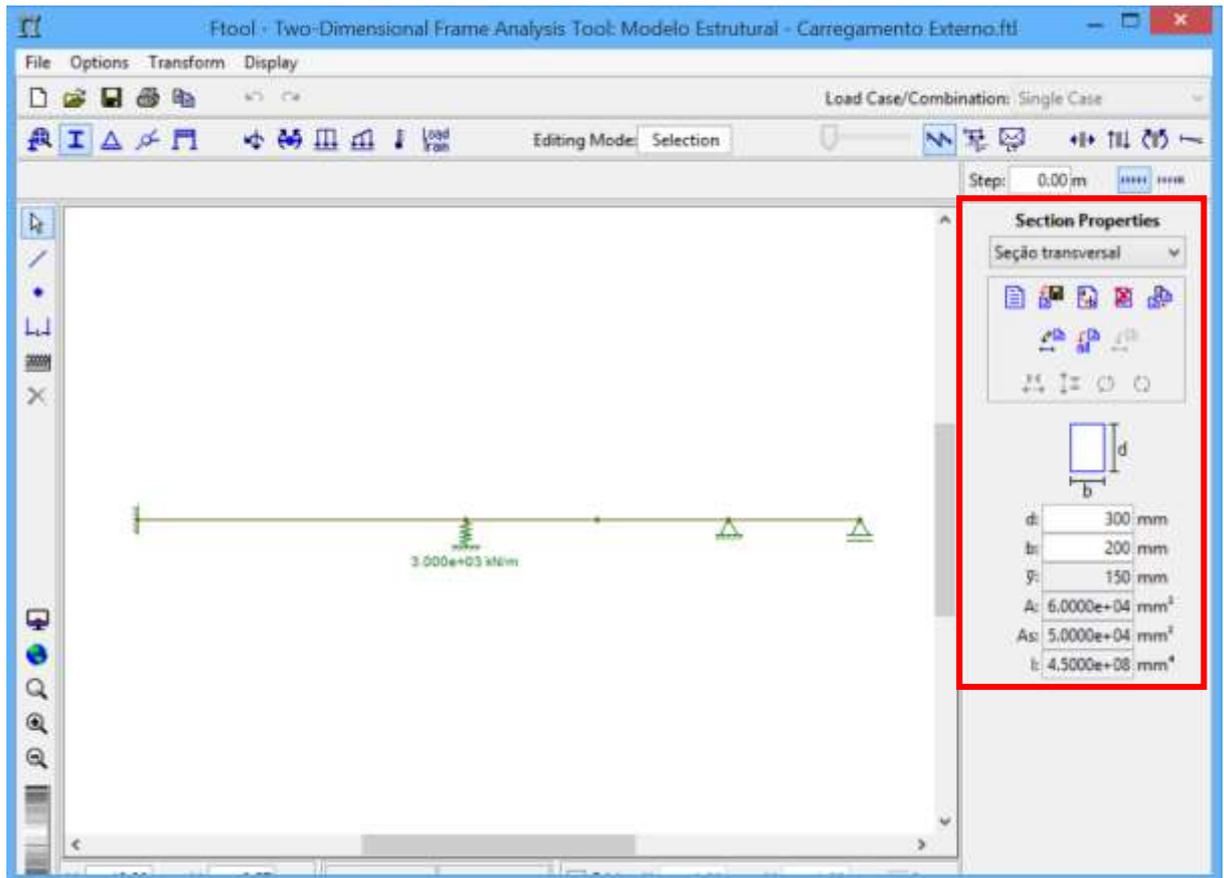


Figura 50: Aplicando a seção transversal sobre a viga

3.6.1.2 Definindo as Propriedades Físicas do Material

Retomando as informações informadas na seção 3.1 e com auxílio da ferramenta *Material parameters*, foi possível modelar o material que constitui a viga conforme a Figura 51.

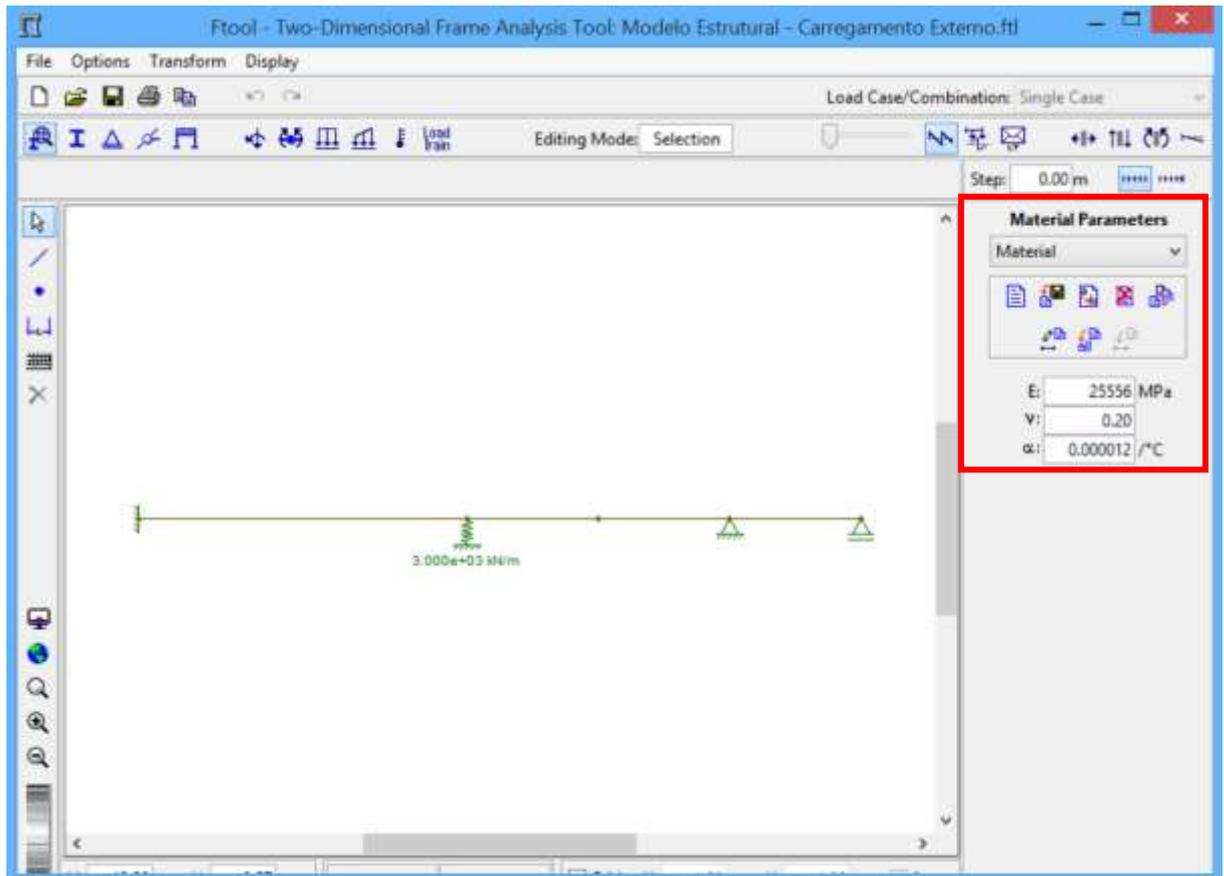


Figura 51: Aplicação do tipo de material da viga

3.6.1.3 Definindo os carregamentos

Uma vez definido todos os parâmetros físicos da viga bem como sua configuração geométrica, é aplicado-se os seguintes carregamentos sobre a viga.

- Carregamento externo (Modelo 1)

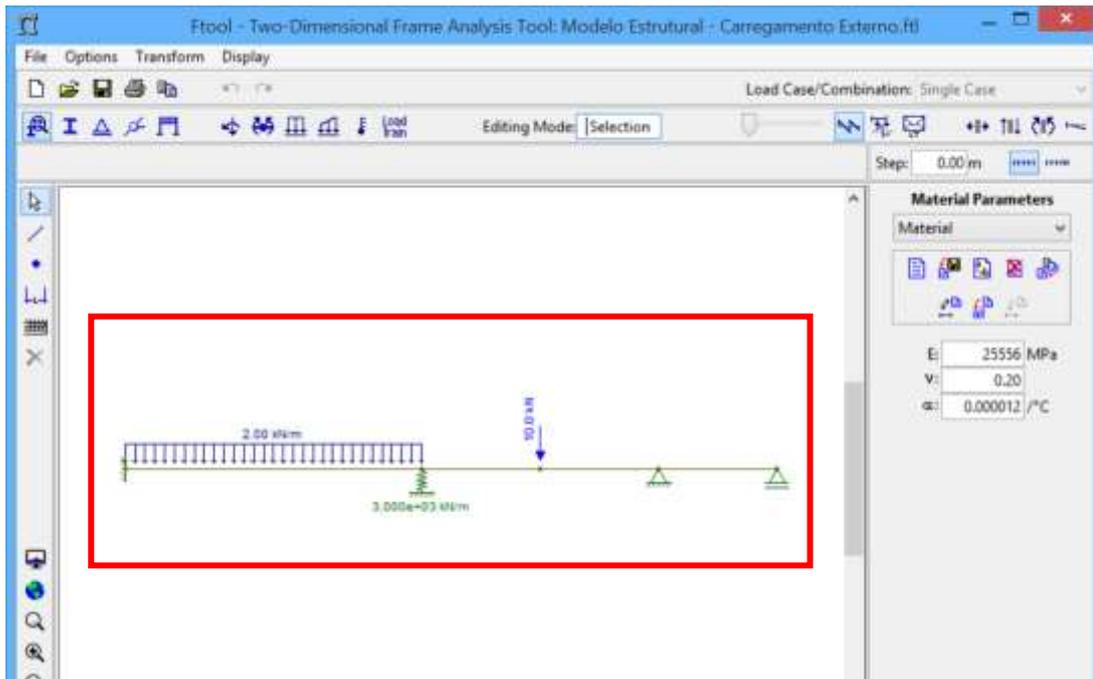


Figura 52: Viga submetida ao carregamento com propriedades físicas aplicadas

- Variação de temperatura (Modelo 2)

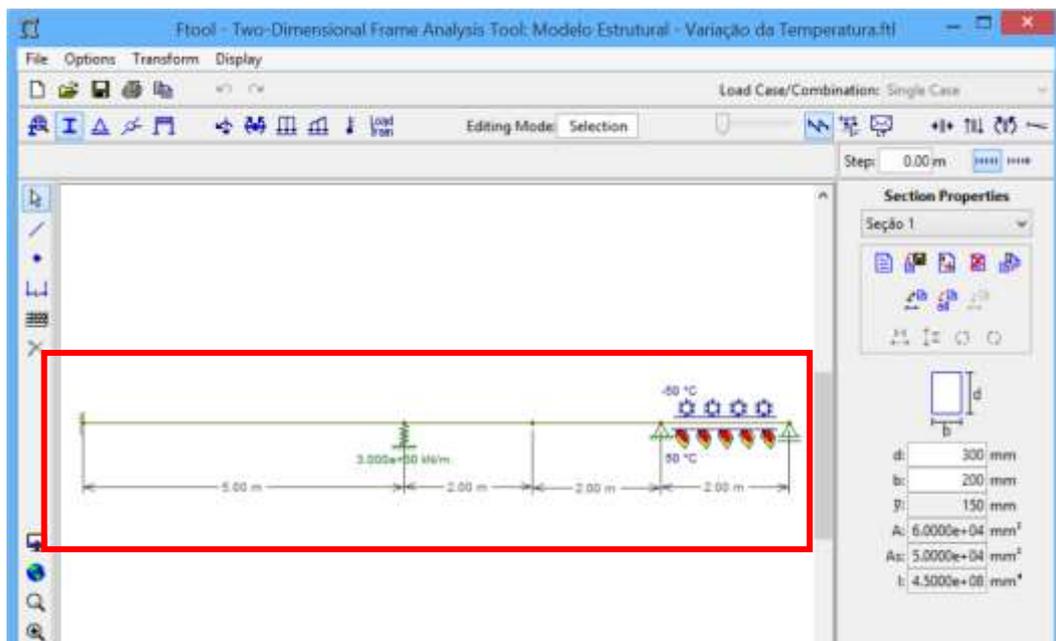


Figura 53: Viga submetida a variação da temperatura com propriedades físicas definidas

- Carregamento externo e variação da temperatura aplicada (Modelo 3)

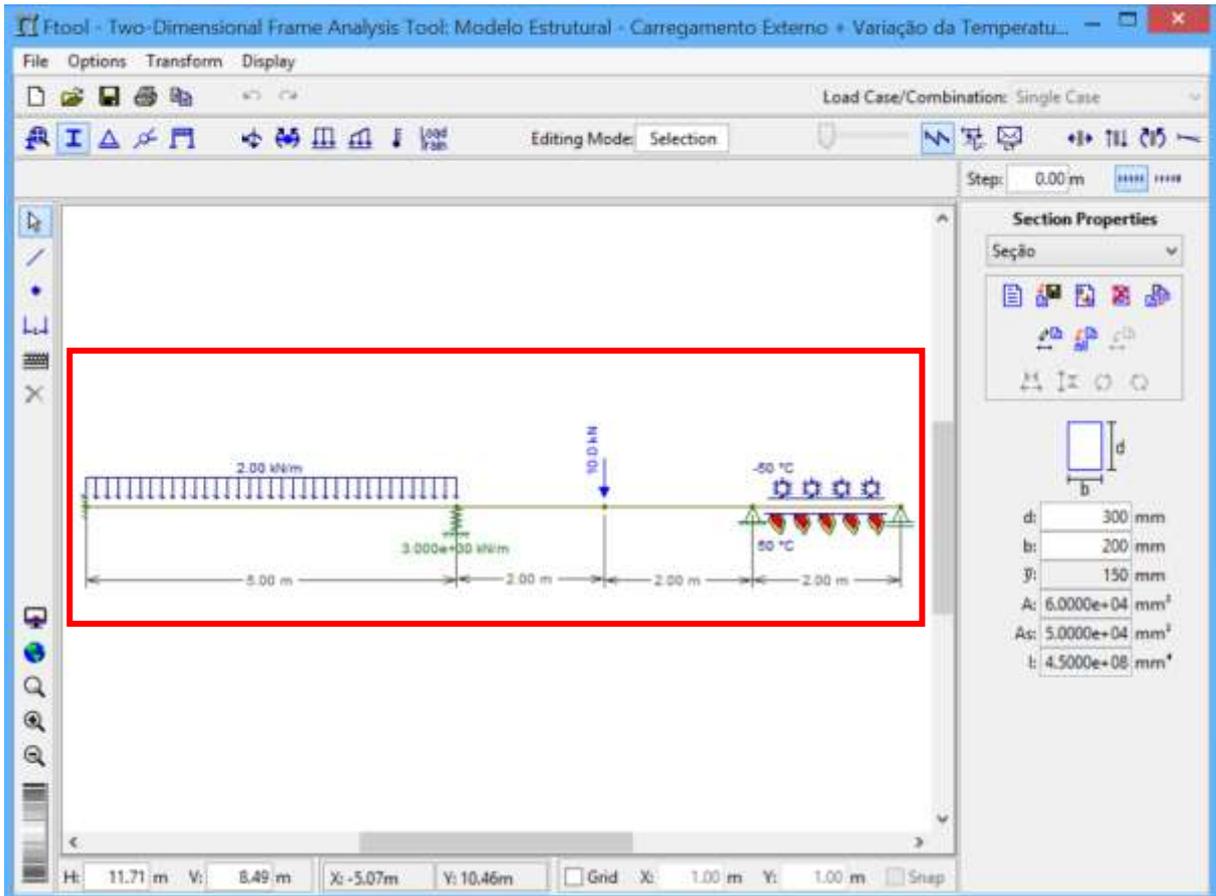


Figura 54: Viga submetida a carregamento externo e variação da temperatura com propriedades físicas definidas

3.7 Resultados da Simulação do F-Tool

Uma vez modelados as vigas acima descritas, foi possível então obter os seguintes diagramas de momento fletor e esforço cortante bem como as reações de apoio que surge em cada modelo evidenciado.

Vale ressaltar que a unidade de medida dos momentos fletores é kN.m e a unidade de medida dos esforços cortantes e reações de apoio é kN.

- Para o modelo 1

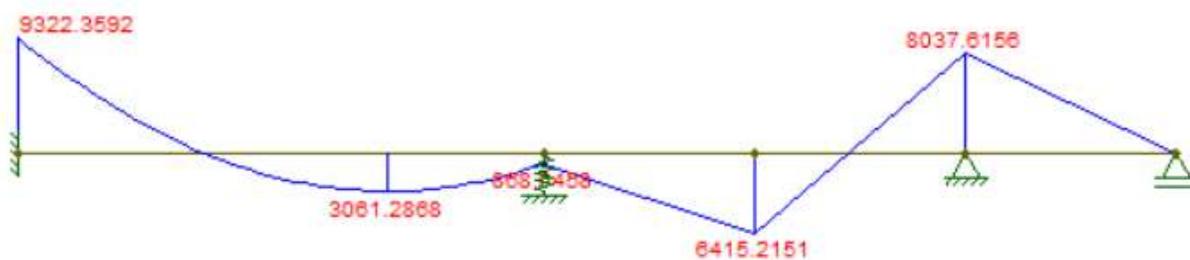


Figura 55: Diagrama do momento fletor do modelo 1

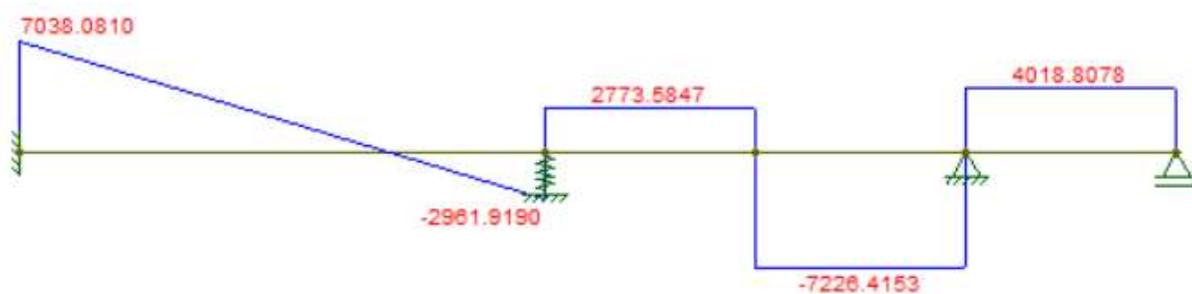


Figura 56: Diagrama do esforço cortante do modelo 1



Figura 57: Reações de apoio do modelo 1

- Para o modelo 2

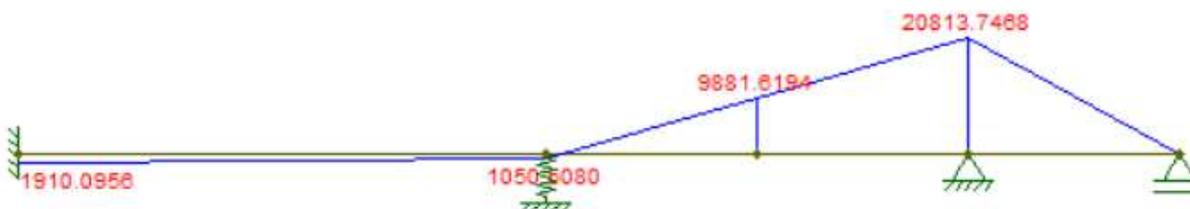


Figura 58: Diagrama do momento fletor para o modelo 2

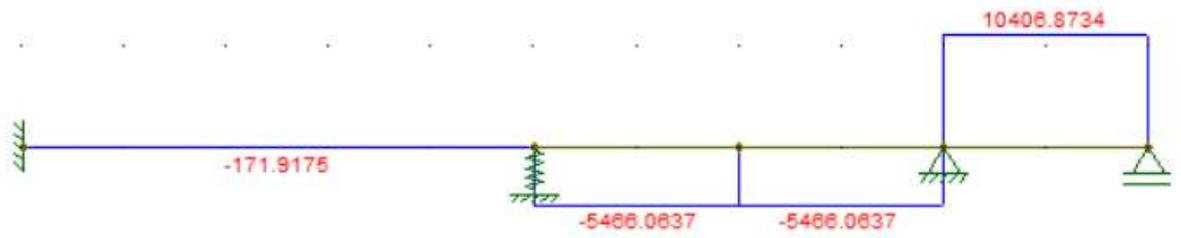


Figura 59: Diagrama do esforço cortante para o modelo 2

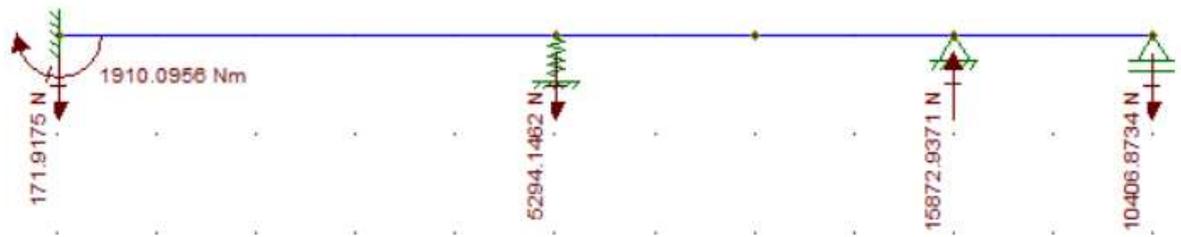


Figura 60: Reações de apoio para o modelo 2

- Para o modelo 3

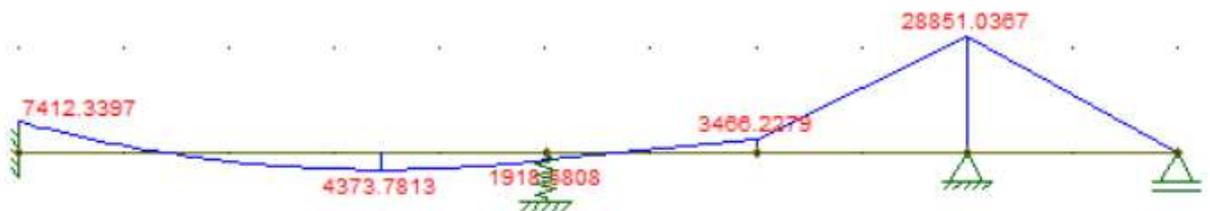


Figura 61: Diagrama do momento fletor para o modelo 3

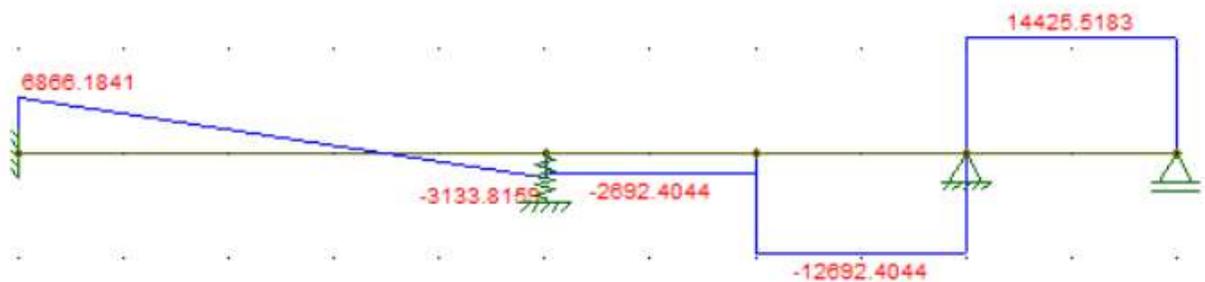


Figura 62: Diagrama do esforço cortante do modelo 3

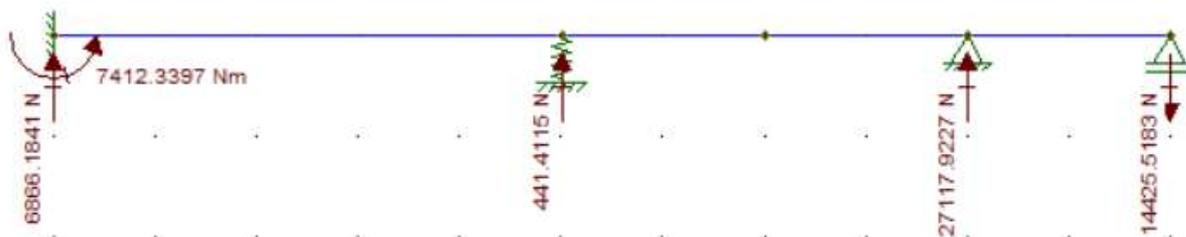


Figura 63: Reações de apoio do modelo 3

Uma vez obtidos todos os resultados já apresentados utilizando os dois programas de análise estrutural, F-Tool e o desenvolvido em linguagem FORTRAN, foi-se compilado os seguintes resultados para cada um dos modelos. Veja:

Tabela 2: Comparativo de resultados obtidos pelos dois programas para o modelo estrutural 1

Modelo Estrutural 1				
Resultados do FORTRAN				
	Apoio 1	Apoio 2	Apoio 3	Apoio 4
Reações de Apoio (N)	7038,079	5735,508	11245,219	4018,806
Momento Fletor (N.m)	-9322,3535	868,0400	-8037,6113	0
Resultados do F-Tool				
	Apoio 1	Apoio 2	Apoio 3	Apoio 4
Reações de Apoio (N)	7038,081	5735,504	11245,223	4018,808
Momento Fletor (N.m)	-9322,3592	868,0458	-8037,6156	0
Diferenças				
Reações de Apoio (N)	-0,002	0,0043	-0,0041	-0,0018
Momento Fletor (N.m)	0,0057	-0,0058	0,0043	0

Tabela 3: Comparativo de resultados obtidos pelos dois programas para o modelo estrutural 2

Modelo Estrutural 2				
Resultados do FORTRAN				
	Apoio 1	Apoio 2	Apoio 3	Apoio 4
Reações de Apoio (N)	-171,8947	-5294,0963	15872,701	-10406,71
Momento Fletor (N.m)	1910,0139	1.050,5403	-20813,4238	0
Resultados do F-Tool				
	Apoio 1	Apoio 2	Apoio 3	Apoio 4
Reações de Apoio (N)	-171,9175	-5294,1462	15872,9371	-10406,87
Momento Fletor (N.m)	1910,0956	1050,508	-20813,7468	0
Diferenças				
Reações de Apoio (N)	0,0228	0,0499	-0,2361	0,1634
Momento Fletor (N.m)	-0,0817	0,0323	0,323	0

Tabela 4: Comparativo de resultados obtidos pelos dois programas para o modelo estrutural 3

Modelo Estrutural 3				
Resultados do FORTRAN				
	Apoio 1	Apoio 2	Apoio 3	Apoio 4
Reações de Apoio (N)	6866,184	441,413	27117,92	14425,52
Momento Fletor (N.m)	-7412,3398	1.918,5802	-28851,0332	0
Resultados do F-Tool				
	Apoio 1	Apoio 2	Apoio 3	Apoio 4
Reações de Apoio (N)	6866,1841	441,4115	27117,9227	14425,52
Momento Fletor (N.m)	-7412,3397	1918,5808	-28851,0367	0
Diferenças				
Reações de Apoio (N)	-0,0001	0,0015	-0,0027	0,0017
Momento Fletor (N.m)	-0,0001	-0,0006	0,0035	0

4 CONCLUSÃO

É notório perceber que as diferenças encontradas são muito pequenas se comparado a ordem de grandeza dos esforços calculados. Essas pequenas diferenças encontradas podem estar relacionadas à quantidade de casas decimais que cada um dos programas considera no momento da entrada de dados.

Apesar de ocorrer essas pequenas diferenças nos resultados obtidos por cada um dos programas, é possível concluir que o programa de análise estrutural desenvolvido pelo Professor Doutor Jaime Florencio Martins, do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto, apresenta excelentes resultados se comparado com os resultados do programa amplamente utilizado nas análises estruturais no ambiente acadêmico (F-Tool), considerando como principais características, vigas contínuas e hiperestáticas sobre apoios elásticos submetidas à carregamento externo e variação da temperatura.

4.1 Sugestões para Futuras Pesquisas

Algumas sugestões para desenvolvimento de trabalhos futuros são apresentadas a seguir:

- Análise de deslocamentos em vigas hiperestáticas sobre apoios elásticos lineares submetidas a variação da temperatura utilizando o Método da Equação dos Três Momentos;
- Análises de esforços internos em vigas hiperestáticas sobre apoios elásticos não-lineares submetidas a variação da temperatura utilizando o Método da Equação dos Três Momentos;
- Comparação dos esforços internos em entre vigas hiperestáticas sobre apoios elásticos lineares e sobre apoios rígidos;
- Desenvolvimento de um programa de análise estrutural utilizando o Método da Equação dos Três Momentos no Excel.

REFERÊNCIAS

- Hibbeler, R. C. (2010). *Resistência dos Materiais*. São Paulo: Pearson Education do Brasil Ltda.
- Martha, L. F. (2010). *Métodos Básicos da Análise de Estruturas*. Rio de Janeiro: Elsevier Editora.
- Martins, J. F. (1991). Notas de Aula do Professor, Universidade *Federal de Ouro Preto, Ouro Preto*.
- Romão, X. (2002/2003). Notas de Aula de Mecânica dos Sólidos I.
- Silva, L. F. (Março de 2004). Cálculo dos esforços internos e deflexões de vigas sobre base elástica não linear usando o Método da Flexibilidade. Ouro Preto, Brasil, Minas Gerais: Universidade Federal de Ouro Preto.
- Timoshenko, S. P. (1983). *Mecânica dos Sólidos*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
- Vanderlei, R. D. (19 de 5 de 2010). *Mecânica dos Sólidos I*. Fonte: Grupo de Desenvolvimento e Análise do Concreto Estrutural: <http://www.gdace.uem.br/romel/MDidatico/MecanicaSolidosI/Capitulo4-DeflexaodeVigas.pdf>

Apêndice A

Relatório Gerado Pelo Programa Em Linguagem Fortran Para O Modelo Estrutural 1

PROGRAMA PARA CALCULO DOS ESFORCOS INTERNOS
E DEFLEXOES DE VIGAS HIPERESTATICAS

D A D O S G E R A I S

NUMERO DE APOIOS= 4
NUMERO DE VAOS COM VARIACAO DA TEMPERATURA= 0
NUMERO DE APOIOS ELASTICOS= 1
NUMERO DE APOIOS COM RECALQUE= 0

NUMERO DE CARGAS ATUANTE NOS VAOS,	COMPRIMENTO E EI		
VAO	CARGAS CONCENTRADAS	CARGA UNIF DISTRIB.	COMPRIMENTO EI
1	0	1	5.000
11500000.0			
2	1	0	4.000
11500000.0			
3	0	0	2.000
11500000.0			

VALORES DOS CARREGAMENTOS NOS VAOS

VAO 1
CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA = 2000.00
VAO 2
CARGA(S) CONCENTRADA(S)

NUMERO INTENSIDADE DISTANCIA DA FORCA ATE O APOIO ESQUERDO (a):
1 10000.00 2.00

VAO 3
NAO EXISTE CARREGAMENTO NO VAO 3

APOIOS ELASTICOS

APOIO = 2 CONSTANTE DE MOLA = 3000000.

IDENTIFICACAO DOS APOIOS EXTERNOS

TIPO 0 = APOIO SIMPLES SEM MOMENTO FLETOR APLICADO
TIPO 2 = ENGASTE

CODIGO DO APOIO 1 = 2
CODIGO DO APOIO 4 = 0

MOMENTOS FLETORES NOS APOIOS

APOIO	VALOR DO MOMENTO FLETOR
1	-9322.3535
2	868.0400

3 -8037.6113
4 0.0000

REACOES DE APOIO

O SINAL POSITIVO INFORMA QUE A REACAO DE APOIO TEM O SENTIDO PARA CIMA

VAO	VA	VB
1	0.7038079E+04	0.2961921E+04
2	0.2773587E+04	0.7226413E+04
3	0.4018806E+04	-0.4018806E+04

DESLOCAMENTO VERTICAL DOS APOIOS ELASTICOS

APOIO	DESLOCAMENTO
1	0.0000000E+00
2	0.1911836E+01
3	0.0000000E+00
4	0.0000000E+00

Apêndice B

Relatório Gerado Pelo Programa Em Linguagem Fortran Para O Modelo Estrutural 2

PROGRAMA PARA CALCULO DOS ESFORCOS INTERNOS
E DEFLEXOES DE VIGAS HIPERESTATICAS

D A D O S G E R A I S

NUMERO DE APOIOS= 4
NUMERO DE VAOS COM VARIACAO DA TEMPERATURA= 1
NUMERO DE APOIOS ELASTICOS= 1
NUMERO DE APOIOS COM RECALQUE= 0

NUMERO DE CARGAS ATUANTE NOS VAOS,	COMPRIMENTO E EI		
VAO	CARGAS CONCENTRADAS	CARGA UNIF DISTRIB.	COMPRIMENTO EI
1	0	0	5.000
11500000.0			
2	0	0	4.000
11500000.0			
3	0	0	2.000
11500000.0			

VALORES DOS CARREGAMENTOS NOS VAOS

VAO 1
NAO EXISTE CARREGAMENTO NO VAO 1
VAO 2
NAO EXISTE CARREGAMENTO NO VAO 2
VAO 3
NAO EXISTE CARREGAMENTO NO VAO 3

VAO(S) COM VARIACAO DE TEMPERATURA
VÇO = 3
VALOR DA TEMPERATURA NA FACE SUPERIOR = -50.0000000
VALOR DA TEMPERATURA NA FACE INFERIOR = 50.0000000
ALTURA DO VAO = 0.3000000
VALOR DO COEFICIENTE DE DILATACAO TERMICA 0.0000120000

APOIOS ELASTICOS
APOIO = 2 CONSTANTE DE MOLLA = 3000000.

IDENTIFICACAO DOS APOIOS EXTERNOS
TIPO 0 = APOIO SIMPLES SEM MOMENTO FLETOR APLICADO
TIPO 2 = ENGASTE

CODIGO DO APOIO 1 = 2
CODIGO DO APOIO 4 = 0

MOMENTOS FLETORES NOS APOIOS

APOIO	VALOR DO MOMENTO FLETOR
1	1910.0139
2	1050.5403
3	-20813.4238
4	0.0000

REACOES DE APOIO

O SINAL POSITIVO INFORMA QUE A REACAO DE APOIO TEM O SENTIDO PARA CIMA

VAO	VA	VB
1	-0.1718947E+03	0.1718947E+03
2	-0.5465991E+04	0.5465991E+04
3	0.1040671E+05	-0.1040671E+05

DESLOCAMENTO VERTICAL DOS APOIOS ELASTICOS

APOIO	DESLOCAMENTO
1	0.0000000E+00
2	-0.1764699E+01
3	0.0000000E+00
4	0.0000000E+00

Apêndice C

Relatório Gerado Pelo Programa Em Linguagem Fortran Para O Modelo Estrutural 3

PROGRAMA PARA CALCULO DOS ESFORCOS INTERNOS
E DEFLEXOES DE VIGAS HIPERESTATICAS

D A D O S G E R A I S

NUMERO DE APOIOS= 4
NUMERO DE VAOS COM VARIACAO DA TEMPERATURA= 1
NUMERO DE APOIOS ELASTICOS= 1
NUMERO DE APOIOS COM RECALQUE= 0

NUMERO DE CARGAS ATUANTE NOS VAOS,	COMPRIMENTO E EI				
VAO	CARGAS CONCENTRADAS	CARGA UNIF	DISTRIB.	COMPRIMENTO	EI
1	0	1		5.000	
11500000.0					
2	1	0		4.000	
11500000.0					
3	0	0		2.000	
11500000.0					

VALORES DOS CARREGAMENTOS NOS VAOS

VAO 1
CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA = 2000.00

VAO 2
CARGA(S) CONCENTRADA(S)

NUMERO INTENSIDADE DISTANCIA DA FORCA ATE O APOIO ESQUERDO (a):
1 10000.00 2.00

VAO 3
NAO EXISTE CARREGAMENTO NO VAO 3

VAO(S) COM VARIACAO DE TEMPERATURA

VÇO = 3
VALOR DA TEMPERATURA NA FACE SUPERIOR = -50.0000000
VALOR DA TEMPERATURA NA FACE INFERIOR = 50.0000000
ALTURA DO VAO = 0.3000000
VALOR DO COEFICIENTE DE DILATAÇAO TERMICA 0.0000120000

APOIOS ELASTICOS

APOIO = 2 CONSTANTE DE MOLLA = 3000000.

IDENTIFICACAO DOS APOIOS EXTERNOS

TIPO 0 = APOIO SIMPLES SEM MOMENTO FLETOR APLICADO
TIPO 2 = ENGASTE

CODIGO DO APOIO 1 = 2
CODIGO DO APOIO 4 = 0

MOMENTOS FLETORES NOS APOIOS

APOIO	VALOR DO MOMENTO FLETOR
1	-7412.3398
2	1918.5802
3	-28851.0332
4	0.0000

REACOES DE APOIO

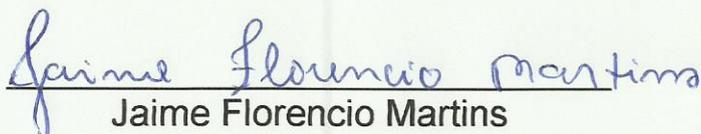
O SINAL POSITIVO INFORMA QUE A REACAO DE APOIO TEM O SENTIDO PARA CIMA

VAO	VA	VB
1	0.6866184E+04	0.3133816E+04
2	-0.2692403E+04	0.1269240E+05
3	0.1442552E+05	-0.1442552E+05

DESLOCAMENTO VERTICAL DOS APOIOS ELASTICOS

APOIO	DESLOCAMENTO
1	0.0000000E+00
2	0.1471375E+00
3	0.0000000E+00
4	0.0000000E+00

Certifico que o aluno Paulo Henrique Pereira da Silva, autor do trabalho de conclusão de curso intitulado **ESFORÇOS INTERNOS EM VIGAS SOBRE APOIOS ELÁSTICO LINEARES USANDO A EQUAÇÃO DOS TRÊS MOMENTOS** efetuou as correções sugeridas pela banca examinadora e que estou de acordo com a versão final do trabalho.


Jaime Florencio Martins
Orientador

Ouro Preto, 11 de dezembro de 2018