



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO**  
**ESCOLA DE MINAS**  
**COLEGIADO DO CURSO DE ENGENHARIA DE**  
**CONTROLE E AUTOMAÇÃO - CECAU**



**MARCO AURÉLIO LIMA SANTOS CARVALHO**

**EQUAÇÃO DE DUFFING APLICADA A ANÁLISE DE UM OSCILADOR**  
**MAGNETO-ELÁSTICO.**

**MONOGRAFIA DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA**  
**DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO**

**Ouro Preto, 2018**

MARCO AURÉLIO LIMA SANTOS CARVALHO

**EQUAÇÃO DE DUFFING APLICADA A ANÁLISE DE UM OSCILADOR  
MAGNETO-ELÁSTICO.**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Engenheiro de Controle e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Ronilson Rocha

Ouro Preto

Escola de Minas – UFOP

Julho/2018

C331e Carvalho, Marco Aurélio Lima Santos.  
Equação de Duffing Aplicada a Análise de um Oscilador Magneto-Elástico  
[manuscrito] / Marco Aurélio Lima Santos Carvalho. - 2018.

64f.: il.: grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Ronilson Rocha.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia de Controle e Automação e Técnicas Fundamentais.

1. Dinâmica não linear. 2. Análise geométrica. 3. Bifurcações. 4. Domínio da frequência. 5. Função descritiva. I. Rocha, Ronilson. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.


CDU: 681.5

Catálogo: [ficha@sisbin.ufop.br](mailto:ficha@sisbin.ufop.br)

Monografia defendida e aprovada, em 03 de julho de 2018, pela comissão avaliadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Ronilson Rocha - Orientador



Prof. Dr. Gustavo Paulinelli Guimarães – Professor Convidado



M.Sc. Vinícius Marinho da Silva – Professor Substituto Convidado

## RESUMO

Este trabalho dedicou-se a estudar os efeitos da dinâmica não linear em uma estrutura mecânica empregando técnicas de análise geométricas, em especial o método da função descritiva. Baseada em um estudo de caso, a pesquisa demonstra que sistemas estruturais podem apresentar oscilações aparentemente caóticas, entre outros comportamentos típicos de sistemas não lineares, mesmo quando sujeitos a forças externas periódicas limitadas. A partir do modelo contínuo do oscilador com um único grau de liberdade desenvolvido, o trabalho estudou a natureza das soluções geométricas. A análise do espaço de estados confirma a existência de múltiplos pontos fixos, afirmação atestada pela teoria de estabilidade de *Lyapunov* e corroborada pela observação de bifurcações, fenômeno que mostra a sensibilidade crítica das características qualitativas do sistema quanto à variação dos parâmetros de rigidez. O método da função descritiva torna possível a investigação das soluções no domínio da frequência, onde se verifica a existência de órbitas periódicas estáveis em torno dos pontos fixos não triviais, cuja amplitude e frequência dependem dos parâmetros da força externa aplicada. Observa-se ainda, a ocorrência de saltos entre dois ou três pontos de equilíbrio estável, bem como, a existência de uma região de instabilidade diretamente relacionada com amplitude e frequência da força externa. A análise geométrica apresentou resultados condizentes com os encontrados em estudos referenciais teóricos e experimentais.

***Palavras-Chave:*** Dinâmica não linear; função descritiva; análise geométrica; domínio da frequência; bifurcações.

## ABSTRACT

The aim of this work is study the effects of the nonlinear dynamics in mechanical structures employing geometric analysis techniques, in particular the describing function method. Based on a case study the research shows that structural systems can present apparently chaotic motions among others typical behaviors of nonlinear systems even when subjected to limited periodic external forces. From the continuous oscillator model with a single degree of freedom developed the work studied the nature of the geometric solutions. The analysis of the state space affirms the existence of multiple fixed points, which was confirmed by *Lyapunov's* theory of stability and corroborated by the observation of bifurcations. Phenomenon that shows the critical sensitivity of the qualitative characteristics of the system regarding the variation of the stiffness parameters. The describing function method makes it possible to investigate solutions in the frequency domain, where the existence of periodic stable orbits around non-trivial fixed points is checked, whose amplitude and frequency depend on the parameters of the applied external force. It is still observed the occurrence of jumps between two or three stable equilibrium points as well as the existence of a region of instability directly related to the amplitude and frequency of the external force. The geometric analysis presented results consistent with those found in theoretical and experimental reference studies.

**Keywords:** Nonlinear dynamics; describing functions; geometric analysis; frequency domain; bifurcations.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Equações de frequência e amplitude de <i>jump-up</i> e <i>jump-down</i> .....	49
--	----

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Representação gráfica de um sistema não controlado .....	16
Figura 2.2 - Sistema mecânico massa, mola e amortecedor.....	16
Figura 2.3 - Gráfico de deformação característica de molas não lineares descritas pela equação (2.4). Mola linear (linha contínua), mola não linear dura (linha tracejada) e mola não linear macia (traço e ponto). .....	20
Figura 2.4 - Aparato experimental, mostrando a viga elástica e ímãs permanentes.....	21
Figura 3.1 - Retrato de fase de sistemas lineares: (a) nó instável, (b) nó estável, (c) ponto de sela, (d) centro, (e) foco estável e (f) foco instável. ....	29
Figura 3.2 - Poço de potencial duplo não parabólico a partir de (3.14). (a) $K_1 < 0$ e $K_3 > 0$ , (b) $K_1 > 0$ e $K_3 < 0$ . ....	32
Figura 3.3 - Bifurcação forquilha supercrítica.....	33
Figura 3.4 - Espaço de fase do modelo de Duffing, equação (3.8), com parâmetros $\beta = -1$ ; $\omega = 1$ ; $\xi = 0,05$ ; $\Omega = 1,4$ e $U = 0,1$ : (a) estado transiente; (b) estado estacionário. ....	34
Figura 3.5 - Espaço de fase do modelo de Duffing, equação (3.8), com parâmetros $\beta = -1$ ; $\omega = 1$ ; $\xi = 0,05$ ; $\Omega = 1,4$ : (a) $U = 0,33$ ;(b) $U = 0,345$ ;(c) $U = 0,37$ ; (d) $U = 0,375$ . ....	36
Figura 3.6 - Configuração do sistema com única não linearidade dominante.....	38
Figura 3.7 - Definição da função descritiva .....	40
Figura 3.8 - (a) Sistema com única não linearidade em malha fechada; (b) sistema linearizado correspondente usando função descritiva. ....	43
Figura 3.9 - Diagrama de <i>Nyquist</i> com parâmetros $\xi = 0,05$ , $\omega_n = 1$ e $k_3 = 1$ . ....	45
Figura 3.10 - Gráfico da resposta em frequência obtido a partir da equação (3.53): (AB) <i>Jump-Down</i> ; (CD) <i>Jump-Up</i> . ....	48
Figura 4.1 - Plano de fase para o caso de $0 < 0,0036 < k_1$ .....	52
Figura 4.2 - Poço de potencial duplo do modelo, $k_1 = -0,5$ e $k_3 = 0,5$ .....	53
Figura 4.3 - Espaço de fase do modelo com diferentes condições iniciais. ....	53
Figura 4.4 - Diagrama de Bifurcação .....	54
Figura 4.5 – Diagrama de blocos da função descritiva.....	56
Figura 4.6 - Diagrama de <i>Nyquist</i> para o sistema da Figura 4.5 .....	57
Figura 4.7 - Gráfico da resposta em frequência obtido a partir da equação (4.1): (AB) <i>Jump-Down</i> ; (CD) <i>Jump-Up</i> .....	59



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	9
1.1	Objetivo Geral .....	11
1.2	Objetivos Específicos .....	11
1.3	Justificativa .....	11
1.4	Metodologia .....	12
1.5	Estrutura do trabalho.....	12
2	EMBASAMENTO TEÓRICO .....	14
2.1	Considerações Iniciais .....	14
2.2	Introdução a sistemas dinâmicos .....	15
2.3	Sistemas Lineares .....	17
2.4	Sistemas não lineares .....	17
2.4.1	Comportamentos típicos de sistemas não lineares.....	18
2.4.2	Tipos comuns de não linearidades .....	19
2.5	Oscilador Magneto-elástico Determinístico .....	20
2.5.1	Modelo Teórico – Força Magnética .....	22
2.5.2	Modelo Discreto – A teoria da Catástrofe .....	23
2.5.3	Modelo Contínuo - Método de <i>Galerkin</i> .....	24
3	MÉTODOS GEOMÉTRICOS.....	26
3.1	Análise do Plano de Fase .....	26
3.1.1	Análise do plano de fase para sistemas lineares .....	27
3.1.2	Análise do plano de fase para sistemas não lineares .....	29
3.1.3	Bifurcação.....	32
3.1.4	Ciclo Limite .....	33
3.1.5	Caos .....	34
3.2	Função Descritiva .....	36

3.2.1	Função Descritiva com entrada senoidal .....	37
3.2.2	Definição da função descritiva. ....	39
3.2.2.1	Função descritiva de não linearidades do tipo polinomial.....	41
3.2.3	Método de análise de ciclo limites.....	42
3.2.3.1	Determinação gráfica do ciclo limite.....	44
3.2.4	Análise da resposta em frequência.....	46
4	FUNÇÃO DESCRITIVA APLICADA A UM OSCILADOR.....	51
4.1	Descrição do modelo .....	51
4.1	Análise do Plano de Fase .....	51
4.2	Bifurcação.....	54
4.3	Função Descritiva .....	55
4.3.1	Definindo a função descritiva.....	55
4.3.2	Aplicando a transformada de Laplace .....	55
4.3.3	Caracterizando ciclo limite .....	56
4.3.4	Resposta em frequência .....	58
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	60
5.1	Sugestões para trabalhos futuros .....	61
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	62

# 1 INTRODUÇÃO

O progresso da engenharia guiou o desenvolvimento de dispositivos, máquinas e estruturas cada vez mais eficientes, complexas e que respeitem exigências de economia, segurança e qualidade. No entanto, estas características demandam dos projetistas métodos de análise que considerem mais do que as propriedades dinâmicas do sistema, que considerem também o comportamento não linear inerente aos materiais e suas interações.

A dinâmica é a área da engenharia que lida com sistemas que evoluem no tempo. É utilizada para analisar o comportamento do sistema em questão, se: tem uma predisposição ao equilíbrio, a repetir-se em ciclos, ou se apresenta outros comportamentos mais complexos. Apesar da sua interdisciplinaridade atual, a dinâmica nasceu como um ramo da física, por volta do século *XVII*, quando Newton, usando equações diferenciais, resolveu o problema de dois corpos (STROGATZ, 1994).

A abordagem clássica de Newton, fundamentada pela teoria linear, foi satisfatória para descrever o comportamento da maioria das estruturas sujeitas a vibrações. Contudo, a exigência de maior flexibilidade torna necessário o estudo da dinâmica não linear, pois, ao longo do tempo, podem surgir deformações no domínio plástico. Desta maneira, a abordagem linear, que normalmente origina grandes reservas de resistência, passa a não caracterizar o comportamento do sistema de maneira eficiente (LAPA, 1987).

Apenas no final do século *XIX* surgiu a abordagem para estudar a dinâmica de oscilações não lineares. Isto se deve ao trabalho de Poincaré que introduziu uma interpretação qualitativa no problema de três corpos. Posteriormente, a ferramenta geométrica desenvolvida por Poincaré floresceu na teoria moderna de sistemas dinâmicos, com aplicações na física e engenharia (STROGATZ, 1994).

Equações diferenciais são usadas para modelar a evolução dinâmica das deformações em estruturas mecânicas. Estes modelos matemáticos simulam tanto características internas dos materiais, quanto demonstram seu comportamento quando sujeitos a excitações externas. Apesar da dificuldade de solução causada pela introdução de parâmetros não lineares, estes sistemas dinâmicos requerem menos hipóteses simplificadoras, e assim, carregam mais informações.

Neste trabalho, utilizou-se o modelo dinâmico de Georg Duffing, engenheiro experimentalista alemão que se dedicou a estudar vibrações não lineares com amortecimento linear viscoso.

Seu trabalho, publicado em 1918, tinha por objetivos: a) estudar a teoria das vibrações e ondas, e; b) compreender as propriedades geométricas de sistemas dinâmicos em equipamentos mecânicos (CVETICANIN, 2012). Se comparada à equação diferencial ordinária linear de 2ª ordem a equação de Duffing possui apenas um parâmetro adicional, não linear, com formato polinomial cúbico.

Muitos pesquisadores aplicaram as mais variadas técnicas de análise para estudar a equação de Duffing. Dentre as quais podemos mencionar: o método OGY (OTT, GREBOGI e YORKE, 1990); as bem conhecidas técnicas de controle de *Lyapunov* (DI BERNARDO, 1996) (CHEN e DONG, 1993) (JIANG, 2002); o método de perturbação baseado na técnica de homotopia (HE, 1999), usada no trabalho de Razzack (2016); e a análise dos modos normais não lineares (ROSENBERG, 1960), usado para tratar o problema de sistemas expostos a sinais periódicos e desenvolver isolamento robusto contra choques e vibrações (VAKAKIS, MANEVITCH, *et al.*, 1996).

Graças às dificuldades encontradas para resolver analiticamente equações de movimento com parâmetros não lineares, técnicas geométricas têm ganhado espaço e importância no estudo de tais sistemas. A análise do plano de fase e os métodos da resposta em frequência são exemplos destas técnicas. Apesar de serem amplamente utilizadas na análise de sistemas lineares, não podem ser diretamente aplicadas a sistemas que apresentam não linearidades.

A fim de observar as respostas do sistema no domínio da frequência, utilizou-se a teoria da função descritiva, técnica que permite a aplicação de representações como o critério de *Nyquist* empregado para determinar o grau de estabilidade de estruturas (MOHAN, 1981). Segundo Felício (2010) a função descritiva fundamenta-se em duas hipóteses que definem sua precisão: a) o espectro em frequência do sinal de saída, descrito por uma série de *Fourier*, tem a amplitude da harmônica fundamental maior que as subsequentes e; b) os elementos lineares do sistema atuam como filtro para as harmônicas superiores (FELICIO, 2010).

Observa-se ainda, alguns fenômenos da dinâmica complexa de sistemas não lineares como: múltiplos pontos de equilíbrio; oscilações periódicas e quase periódicas; bifurcação e; caos, cuja definição está erroneamente relacionada à desordem, quando denota, na verdade, um comportamento aperiódico confinado a uma região limitada que nunca se aproxima de um ponto fixo ou de uma órbita fechada (STROGATZ, 1994).

Para demonstrar estes fenômenos foi usado como exemplo um oscilador magneto-elástico, cujo modelo pode ser reduzido a um sistema com um único grau de liberdade descrito pela

equação de Duffing. Métodos geométricos foram aplicados neste modelo, comparando os resultados com as obras encontradas na literatura (MOON e HOLMES, 1979) (HOLMES, 1979).

### 1.1 Objetivo Geral

Este trabalho dedicou-se a determinar de que forma as técnicas geométricas de análise não linear podem simplificar o estudo da dinâmica estrutural de sistemas modelados pela equação de Duffing, investigando o comportamento do sistema proposto por meio da técnica da função descritiva.

### 1.2 Objetivos Específicos

- Apresentar uma base teórica sobre sistemas, demonstrando o modelo físico e matemático a ser estudado e especificando suas características e dinâmica.
- Analisar de que forma as técnicas de análise dinâmica podem auxiliar no estudo dos comportamentos típicos das estruturas mecânicas, usando, para isso, tanto a análise do plano de fase quanto o método geométrico da função descritiva.
- Apresentar um estudo exemplificando a aplicabilidade das técnicas geométricas na análise da dinâmica estrutural de um oscilador magneto-elástico determinístico modelado pela equação de *Duffing*.

### 1.3 Justificativa

Parâmetros não lineares tornam a solução analítica das equações de movimento quase impossível (STROGATZ, 1994). Desta maneira, outros meios de extrair informações diretamente destes modelos devem ser buscados. Para isso, técnicas como a função descritiva ou a análise do plano de fase podem ser aplicadas, procurando, assim, ter uma visão global das soluções de estrutura não lineares sem resolver explicitamente as equações. Permitindo entender o comportamento do sistema mesmo sem a construção de um protótipo (FELICIO, 2010).

A Equação de Duffing ganha destaque ao descrever matematicamente vários problemas físicos multidisciplinares próximos ao real. Desde sistemas clássicos como: o pêndulo, sistemas de vigas ou cabos sob ação de vibrações (REIS, VASCONCELLOS, *et al.*, 2015), problemas como modelos de prédios suscetíveis a terremotos e ventos fortes, ou de *risers* de petróleo sujeito às correntes marítimas (KOVACIC e BRENNAN, 2011), até aplicações

modernas, como o modelo de gerador piezelétrico de energia proposto por Olympio (2014) e o trabalho de Lifshitz e Cross (2009) sobre a dinâmica não linear de ressonadores micro e nanoeletromecânicos.

O uso do oscilador magneto-elástico como sistema físico a ser estudado neste trabalho se deu pela gama de trabalhos encontrados na literatura (HOLMES, 1979) (MOON e HOLMES, 1979), bem como, pela possibilidade de construção do experimento. O modelo teórico do sistema, obtido por meio da técnica de Galerkin, é similar a equação de Duffing e pode exibir soluções similares aos movimentos observados experimentalmente.

Deve-se ainda, observar a perspectiva de um trabalho de revisão bibliográfica, já que o tema: dinâmica não linear e caos é, atualmente, objeto de pesquisa em muitas áreas do conhecimento, explicando padrões dinâmicos em sistemas naturais, biológicos e sociais (ZAK, ZBILUT e MEYERS, 1997).

#### 1.4 Metodologia

Inicialmente realizou-se uma pesquisa científica exploratória em bases de dados e bibliotecas online, a fim de, familiarizar-se com o modelo dinâmico não linear proposto por Duffing, bem como, aprofundar o conhecimento sobre os métodos de análise dinâmica e a técnica da função descritiva.

A partir daí, utilizou-se a literatura para direcionar o trabalho a um estudo sobre a estabilidade de estruturas mecânicas sujeitas a vibrações periódicas de caráter determinístico, como as provenientes da ação de sismos.

Com o auxílio dos softwares *Matlab* e *Mathematica* foram construídos modelos, onde se pôde simular e analisar o comportamento geométrico do sistema para, posteriormente, confrontar os resultados obtidos com os testes experimentais encontrados nos trabalhos de Holmes (1979) e Moon e Holmes (1979).

#### 1.5 Estrutura do trabalho

O capítulo II apresenta o modelo de Duffing, introduzindo considerações iniciais essenciais para iniciar o estudo da dinâmica de sistemas, apresentando os comportamentos típicos e a espécie de não linearidade do modelo. Aqui, encontra-se também a modelagem aplicada ao oscilador magneto-elástico.

O capítulo III apresenta uma revisão bibliográfica sobre os métodos geométricos de estudo da dinâmica não linear, compreendendo a análise do plano de fase e da função descritiva. Demonstrando a construção matemática destas técnicas, além de suas aplicações.

No capítulo IV as técnicas geométricas são aplicadas ao modelo dinâmico de Duffing, com parâmetros ajustados de modo a representar um protótipo de oscilador magneto-elástico, analisando os resultados encontrados em relação aos trabalhos teóricos alcançados durante a pesquisa bibliográfica.

No capítulo V encontra-se a conclusão do trabalho e, finalmente, temos as referências bibliográficas utilizadas no desenvolvimento do trabalho.

## 2 EMBASAMENTO TEÓRICO

### 2.1 Considerações Iniciais

A dinâmica clássica descreve processos cujo futuro pode ser derivado do passado, e o passado traçado a partir de desempenhos futuros por inversão do tempo. Este comportamento determinístico torna os sistemas dinâmicos clássicos previsíveis. (ZAK, ZBILUT e MEYERS, 1997). Como o problema da análise dinâmica de estruturas, cuja solução se dá pelo estudo da equação que representa o equilíbrio entre as forças envolvidas no movimento, a cada instante de tempo.

Para analisar estruturas sujeitas a grandes deformações, geradas por altos valores de tensão, deve-se considerar os efeitos da dinâmica não linear (LAPA, 1987). Os modelos lineares falham em explicar os efeitos transitórios e mudanças aperiódicas do movimento, enquanto que modelos dinâmicos não lineares fornecem algumas explicações sistemáticas para estes processos, com explicações formais dos fenômenos transitórios (ZAK, ZBILUT e MEYERS, 1997).

Encontrar soluções analíticas exatas das equações de movimento de estruturas mecânicas resume-se a quantizar certas variáveis, posição e velocidade, ao longo do tempo, o que só é possível em determinadas condições de fronteira e carregamento, para sistemas com geometria regular e comportamento linear. Técnicas numéricas são empregadas para encontrar tais soluções analíticas.

Segundo *Lapa* (1987) existem dois procedimentos para descobrir respostas numéricas: a) o método da sobreposição modal, onde encontramos a resposta a partir da sobreposição das respostas separadas de cada modo de vibração da estrutura, e; b) o método da integração direta, onde um procedimento numérico incremental é usado para encontrar as soluções no tempo.

Existem dois tipos principais de sistemas dinâmicos: a) equações diferenciais, que descrevem a evolução do sistema em tempo contínuo, e; b) mapas iterativos, usados para descrever o comportamento de sistemas em tempo discreto. Este trabalho trata de uma equação diferencial na forma da equação de Duffing, como a (2.1).

Estes modelos de tempo contínuo podem ser divididos ainda entre: a) equações diferenciais ordinárias, como a de Duffing, que apresentam apenas uma variável independente, o tempo, e;



b) equações parciais, que além do tempo, apresentam o espaço como variável independente, como a equação do calor (STROGATZ, 1994).

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + K_1x(t) \pm K_3x^3(t) = F(x) \quad (2.1)$$

A equação (2.1) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem por envolver apenas derivadas do tipo:  $dx/dt$  e  $d^2x/dt^2$ . Desta forma, existe apenas uma variável independente, o tempo  $t$ . Os pontos sobre o  $x$  indicam diferenciação com relação ao tempo, então:  $\dot{x} = dx/dt$  e  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ , notação que será usada durante todo o trabalho, podendo a variável  $t$  não aparecer nas equações por simplificação.

A variável  $x$  pode representar uma série de informações como a população de uma espécie em determinado ambiente, ou a concentração de elementos químicos em uma reação, ou ainda, a posição e velocidade de um corpo em movimento (STROGATZ, 1994). Como este trabalho aborda o problema de dinâmica estrutural, a variável  $x$  denotará a posição, enquanto  $\dot{x}$  será a velocidade e  $\ddot{x}$  a aceleração instantânea da estrutura. Tem-se ainda, outros parâmetros da equação (2.1) que são:  $M$ , a massa do sistema;  $C$ , o coeficiente de amortecimento;  $K_1$ , a constante linear de elasticidade;  $K_3$ , o parâmetro não linear da equação e;  $F(x)$ , uma força externa dependente do tempo.

## 2.2 Introdução a sistemas dinâmicos

Um sistema pode ser descrito como um conjunto de elementos interagindo de acordo com uma relação de causa e efeito, organizados de modo a constituírem um único corpo científico de caráter matemático, químico, físico, biológico ou de qualquer outro tipo quantificável, que recebe um sinal de entrada, processa-o, e o envia para o exterior (PURCINA, 2016). Comumente representada como na Figura 2.1, onde:  $u(t)$  é o sinal de entrada, ou excitação;  $d(t)$  perturbações adicionais, ou ruído;  $y(t)$  o sinal de saída, ou resposta, dependente da estrutura do sistema e da presença de um sinal de entrada.

Os modelos matemáticos que descrevem estes sistemas podem ser classificados de acordo com suas características: a) quanto ao estado de suas condições iniciais como relaxados e não relaxados; b) quanto à sensibilidade a entradas futuras, ditos causais ou não causais; c) quanto sua dependência explícita ou não do tempo, autônomos ou não autônomos; d) quanto ao regime de operação, contínuos ou discretos; e) estável ou instável, diz-se estável aquele que mantenha os valores de saída dentro de certos limites de operação; e, por fim, f) linear e não linear que será estudado mais a fundo na próxima subseção.

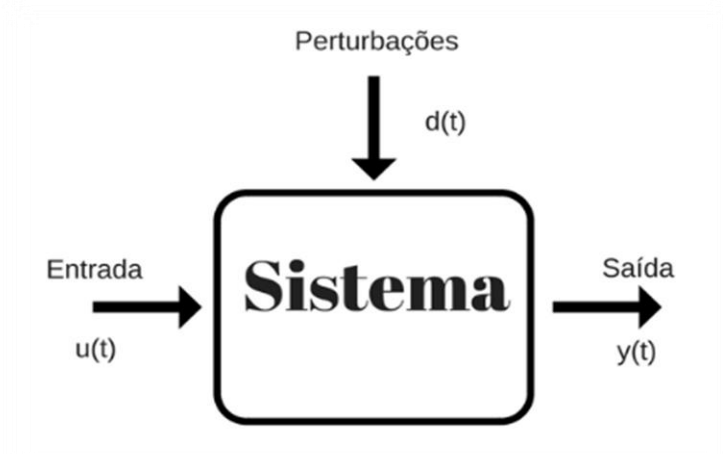


Figura 2.1 - Representação gráfica de um sistema não controlado

Fonte: O autor (2018)

Existem diversos tipos de sistemas dinâmicos como: econômicos, biológicos, elétricos, hidráulicos, térmicos e híbridos. No entanto, o trabalho refere-se especialmente a sistemas mecânicos. Um modelo simples, com um grau de liberdade, pode ser visto na Figura 2.2. O grau de liberdade de um sistema é definido como: o número de coordenadas independentes necessárias para descrever completamente as posições de todas as partes de um sistema em qualquer instante de tempo (PURCINA, 2016).

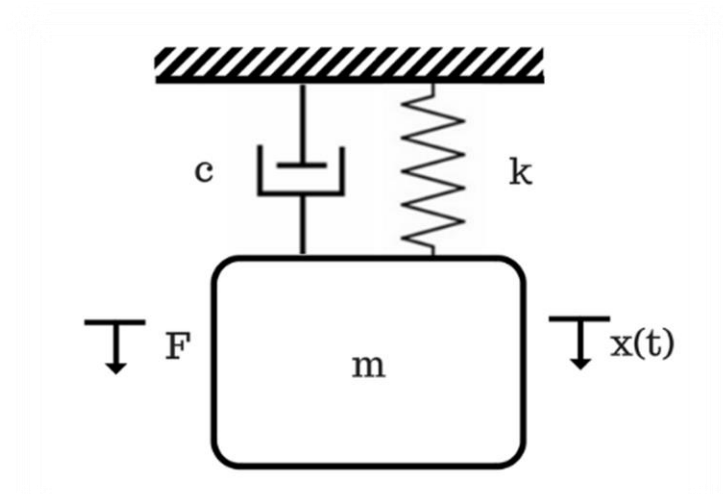


Figura 2.2 - Sistema mecânico massa, mola e amortecedor.

Fonte: O autor (2018)

A segunda lei de Newton traduz o equilíbrio entre as forças atuantes em sistemas mecânicos, como o da Figura 2.2, composto por: massas,  $m$ , elementos responsáveis por armazenar energia potencial gravitacional; molas,  $K$ , as quais armazenam energia potencial elástica e;

amortecedores,  $c$ , que dissipam a energia do sistema. Podemos representar esta lei sob a forma matricial quando o sistema apresenta vários graus de liberdade.

Pode-se classificar o movimento apresentado pelo sistema da Figura 2.2 como: movimento oscilatório livre e não amortecido quando  $c = 0$  e  $F = 0$ ; movimento oscilatório livre e amortecido, quando  $c \neq 0$  e  $F = 0$ ; movimento oscilatório forçado e não amortecido quando  $c = 0$  e  $F \neq 0$ ; forçado e amortecido quando  $c \neq 0$  e  $F \neq 0$ .

### 2.3 Sistemas Lineares

Antes de partir para a análise de equações diferenciais não lineares, deve-se conhecer a dinâmica linear. A teoria de controle linear preocupa-se predominantemente em estudar sistemas lineares invariantes no tempo (SLOTINE e LI, 1991). A equação de Duffing, (2.1), pode ser um exemplo de sistema linear, desde que o parâmetro  $K_3$  seja nulo. Assim, a equação (2.2), descreve o oscilador harmônico forçado com amortecimento linear.

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(x) \quad (2.2)$$

Este sistema, (2.2), é dito linear, porque todos os  $x$ , que aparecem no lado esquerdo da equação, apresentam-se na primeira potência. De outra forma, o sistema seria não linear. Não linearidades típicas são produtos, potências, e funções de  $x$  (STROGATZ, 1994). Para uma definição formal de sistema linear deve-se usar o princípio da superposição.

O princípio da superposição determina o comportamento do sistema quanto à simultaneidade de sinais de entrada. O princípio diz que se as respostas a sinais arbitrários independentes  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$  forem, respectivamente,  $Y_1(t)$  e  $Y_2(t)$ , então o retorno à superposição de sinais, na forma  $\alpha X_1(t) + \beta X_2(t)$ , será  $\alpha Y_1(t) + \beta Y_2(t)$ , para quaisquer valores constantes de  $\alpha$  e  $\beta$  e, dependendo de condições iniciais apropriadas (WORDEN e TOMLINSON, 2001).

### 2.4 Sistemas não lineares

Conhecendo a lei que rege sobre todas as equações diferenciais lineares, torna-se fácil classificar tais sistemas, mas em consequência do comportamento complexo dos sistemas não lineares não há uma propriedade comum a estes. Entretanto, a boa prática da análise dinâmica exige a aplicação de alguma técnica para checar a linearidade do sistema. Portanto, é importante que existam procedimentos fáceis para detectar não linearidades. Os mais comuns são: a) distorção harmônica; b) homogeneidade e; c) reciprocidade (WORDEN e TOMLINSON, 2001).

Tais procedimentos são determinantes para a aplicação de técnicas de análise no domínio da frequência, isto é, quando o exame da função matemática ocorre com respeito à frequência e não ao tempo (WORDEN e TOMLINSON, 2001). Para transformar o domínio de uma função, preservando informações sobre magnitude e fase do sinal de excitação, faz-se uso da transformada de *Laplace*, operador matemático que relaciona o tempo a uma função complexa.

Mesmo não sabendo classificar sistemas não lineares, devido à ausência de propriedade comum definidora, as não linearidades são classificadas em: a) naturais presentes em sistemas de forma inerente, inevitáveis em processos reais e; b) artificiais imposta intencionalmente ao sistema para melhorar o método de controle, simplificar o design do controlador, ou diagnosticar falhas (SLOTINE e LI, 1991).

A equação de Duffing é um exemplo de sistema não linear que pode ser aplicada na modelagem de inúmeros sistemas reais sem que ocorra perda de informações qualitativas. Desta forma, este modelo apresenta alguns dos possíveis fenômenos que a dinâmica complexa das não linearidades oferece.

#### 2.4.1 Comportamentos típicos de sistemas não lineares

- **Múltiplos pontos de equilíbrio:** Ponto de equilíbrio é aquele em que todo o estado que nele se inicia permanece inalterado (STROGATZ, 1994). Um sistema linear apresenta apenas um ponto de equilíbrio, o que demonstra a existência de apenas um ponto de operação em estado estacionário, o qual atrai o estado do sistema, independente da condição inicial. Mas, em sistemas não lineares podem ocorrer múltiplos pontos de equilíbrio, dependendo dos parâmetros impostos e das condições iniciais o estado do sistema pode ser atraído para um, ou outro ponto de equilíbrio no regime estacionário.
- **Oscilações harmônicas, subharmônicas e quase periódicas:** Como citado, em consequência do princípio da superposição, a saída produzida por um sistema linear estável, sob a ação de um sinal periódico, será periódica e com mesma frequência. Enquanto sistemas não lineares podem responder a excitações periódicas com oscilações periódicas, ou quase periódicas, com frequências múltiplas ou sub múltiplas daquela imposta.

- **Bifurcação:** Pontos onde o sistema muda abruptamente de comportamento, passando de um regime dinâmico para outro, mudando também a estabilidade dos pontos de equilíbrio, bem como, a quantidade destes. Estão associados a uma série de fenômenos peculiares aos sistemas não lineares, como descontinuidades, movimentos caóticos, fronteiras fractais e escape de um vale potencial. Estes pontos fornecem modelos de transição e instabilidade de acordo com a mudança de determinado parâmetro (STROGATZ, 1994).
- **Caos:** Em sistemas lineares estáveis, pequenas variações de parâmetros e de condições iniciais correspondem pequenas variações na resposta. Porém este comportamento não acontece em alguns sistemas não lineares, onde as soluções em longo prazo podem ser extremamente sensíveis à variação dos parâmetros e condições iniciais, tornando a saída de um sistema determinístico, a partir de certo valor de tempo, imprevisível (STROGATZ, 1994).
- **Ciclo Limites:** Em um sistema linear para haver oscilação de amplitude constante, é necessário, em sistemas contínuos, um par de polos sobre o eixo imaginário. Sendo tal condição, na prática, impossível, ficando os polos ligeiramente à esquerda ou à direita do eixo, o que significa oscilações amortecidas ou crescentes. No entanto certos sistemas não lineares entram em oscilação estável permanente, com valores constantes de amplitude e frequência, independentemente do valor inicial do estado ou de excitação externa (SLOTINE e LI, 1991).

#### 2.4.2 Tipos comuns de não linearidades

Uma vez que não linearidades são inerentes a sistemas reais, incorporá-las ao modelo matemático aumenta a fidelidade da descrição. Os tipos mais comuns de não linearidades são associados à: saturação; atrito de Coulomb; zona morta; histerese; folga; ou são causadas devido à força restauradora ou amortecimento polinomial. A equação de Duffing apresenta uma não linearidade associada à força restauradora,  $k(x)$ , que pode ser descrita por uma série de Taylor, como na equação (2.3):

$$k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i x^i \quad (2.3)$$

Sendo que a equação de *Duffing* considera apenas a não linearidade cúbica, na forma (2.4):

$$k(x) = k_1x \pm k_3x^3 \quad (2.4)$$

Considerando o parâmetro  $k_1$  como sendo sempre positivo, quando  $k_3$  for maior que zero, tem-se uma força restauradora chamada dura, que tornará o ressonador mais rígido, ou seja, é cada vez mais difícil deformá-lo. Enquanto que, quando  $k_3$  for menor que zero, a não linearidade atuará contra o termo linear, tal sistema é então chamado macio e atua diminuindo sua frequência de ressonância (LIFSHITZ e CROSS, 2009).

A Figura 2.3 foi plotada de acordo com a equação (2.4) para ilustrar as características não lineares da mola. Nota-se a simetria do gráfico em relação à origem,  $x=0$ , bem como, que a característica não linear do termo cúbico só se torna importante no gráfico tensão por deformação a partir de certo valor, por volta de  $x > 0,4$  (KOVACIC e BRENNAN, 2011).

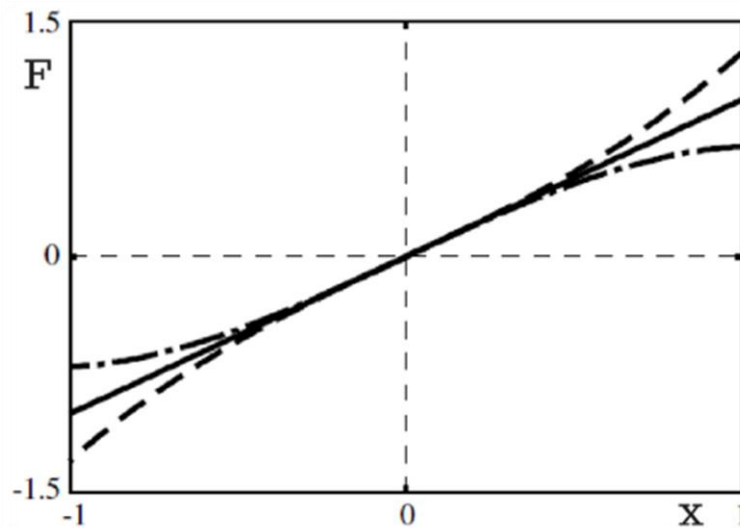


Figura 2.3 - Gráfico de deformação característica de molas não lineares descritas pela equação (2.4). Mola linear (linha contínua), mola não linear dura (linha tracejada) e mola não linear macia (traço e ponto).

Fonte: Kovacic e Brennan (2011).

## 2.5 Oscilador Magneto-elástico Determinístico

Um esboço do oscilador magneto-elástico pode ser visto na Figura 2.4, o aparelho consiste de uma viga engastada, ímãs permanentes, um mecanismo vibratório e um dispositivo para gravar a deformação da viga. O modelo desenvolvido no trabalho considera a força magnética não linear e força restaurada elástica linear, este modelo pode ser reduzido a um oscilador com um único grau de liberdade que pode exibir soluções caóticas similares aos movimentos observados experimentalmente.

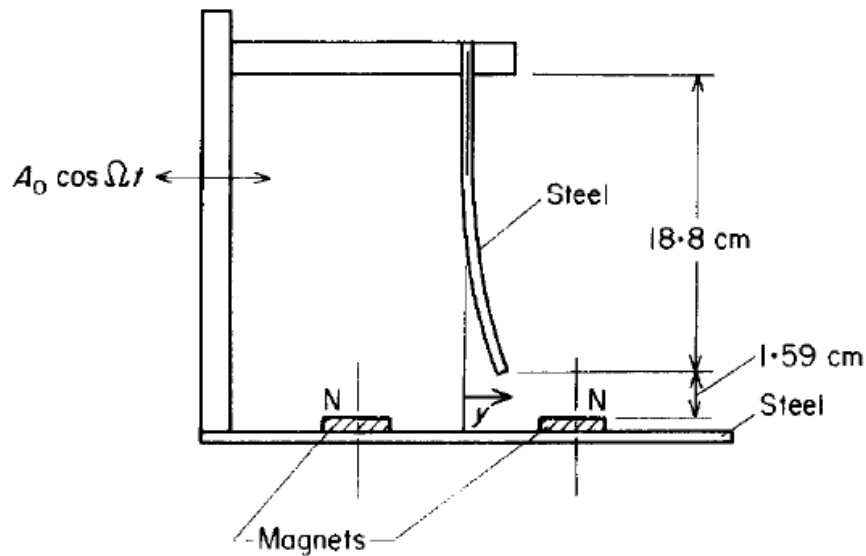


Figura 2.4 - Aparato experimental, mostrando a viga elástica e ímãs permanentes.

Fonte: Moon e Holmes (1979).

O deslocamento induzido pela força magnética e pelo mecanismo vibratório pode levar a estrutura a apresentar movimentos não periódicos do tipo caótico em um oscilador determinístico. Estes movimentos são análogos às soluções de sistemas dinâmicos que possuem os chamados atratores estranhos. Apesar de uma força senoidal limitada ser aplicada, o movimento aparentemente caótico resultante do salto entre dois ou três pontos de equilíbrio estáveis é observado.

Os autores, *Moon e Holmes (1979)*, apresentam em seu trabalho, o que acreditam ser, a primeira evidência experimental da existência de atratores estranhos em mecânica estrutural. No experimento, uma força magnética é usada para torcer uma haste, sendo estudadas as oscilações não lineares da haste tensionada. A vantagem de usar força magnética é que ela não adiciona massa à estrutura.

Atratores estranhos são fenômenos que foram estudados em equações diferenciais autônomas de terceira ordem, como no trabalho de *Lorenz*. Mais recentemente este comportamento caótico foi observado em osciladores não lineares de segunda ordem. Atratores estranhos de segunda ordem são caracterizados pela existência de pelo menos três pontos de equilíbrio em um estado livre: um instável e dois estáveis (*HOLMES, 1979*).

Tal condição pode ser obtida por uma haste flexionada sujeita a uma carga magnética axial quando uma força periódica moderada for aplicada à haste. Desta forma, o movimento da haste salta de um ponto de equilíbrio para outro ponto de maneira aparentemente caótica. Se o

movimento da haste puder ser reduzido a um único modo, então, por meio da técnica de *Galerkin*, obtém-se uma equação de segunda ordem do tipo de Duffing, **(2.1)**.

Quando o sistema for livre,  $F = 0$ , ou a amplitude de entrada for pequena,  $F \ll \varepsilon_0$ , para  $0 < \varepsilon_0 < C$ , o sistema terá três pontos de equilíbrio. Neste caso, observa-se que os pontos de equilíbrio não triviais são orbitas periódicas que atraem as trajetórias próximas, enquanto, o ponto trivial,  $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ , é um ponto de sela (MOON e HOLMES, 1979).

Linearizando a equação **(2.1)** em torno dos pontos de equilíbrio tem-se um sistema de segundo ordem com frequência natural  $\omega_0 = 1$ . O comportamento da equação de Duffing que descreve o sistema para valores de amplitudes mais altos,  $F \gg \varepsilon_0$ , será discutido mais à frente e o estudo mostrará que comportamentos mais complexos podem ocorrer nesta condição (MOON e HOLMES, 1979).

### 2.5.1 Modelo Teórico – Força Magnética

A força magnética em sólidos pode ser oriunda de duas fontes: a) correntes elétricas, ou; b) magnetização. Como nas referências usadas nenhuma corrente elétrica é aplicada, os ímãs permanentes são responsáveis pelo campo magnético estático, não homogêneo, existente. Este campo induz uma magnetização  $G$ . A haste metálica pode, então, ser modelada como um material onde a magnetização é proporcional ao campo magnético local (MOON e HOLMES, 1979):

$$G = [x/x + 1]B/\mu_0 \quad (2.5)$$

Onde  $\mu$  é permeabilidade magnética e  $x$  permissividade magnética. O campo  $B$  pode ser descrito como  $B_0$  produzido por ímãs externos e  $B_I$  produzido pela magnetização. Sendo considerado nulo o campo produzido por magnetização  $B_I$ . Os ímãs externos podem produzir força e momento,  $H$  e  $J$  respectivamente.

$$H = MB_0; J = M \nabla B_0 \quad (2.6)$$

Estas forças são conservativas e podem ser derivadas de um potencial magnético expresso por:

$$w = -1/2 \int MB_0 dv \quad (2.7)$$

A existência desta energia potencial magnética é importante para a dinâmica e estabilidade da haste metálica. Isto quer dizer que para um sistema autônomo apenas flambagem estática ou instabilidade divergente podem ocorrer (MOON e HOLMES, 1979).



As não linearidades inclusas na análise são provenientes da não homogeneidade do campo magnético  $B_0$ . Segundo *Moon e Holmes* (1979) a força magnética e o deslocamento da haste mantêm uma relação não linear entre si.

### 2.5.2 Modelo Discreto – A teoria da Catástrofe

Um modelo teórico heurístico unidimensional pode ser obtido assumindo que apenas a ponta da haste está magnetizada e negando o efeito do momento  $C$  da equação (2.6) e usando o fato que o campo  $B_0$  é irrotacional, isto é,  $\nabla B_0 = 0$ . Podemos escrever a força magnética total como:

$$w = -1/2 \alpha B_{0x}^2 \quad (2.8)$$

Se os ímãs foram posicionados simetricamente em relação à origem, o experimento exige uma dependência não linear entre a força e o deslocamento da ponta da haste. Se uma aproximação de modo único for feita para a deformação da haste, então a energia elástica terá a forma:

$$V = 1/2 ky^2 + \text{termos de ordem superior} \quad (2.9)$$

Medidas obtidas experimentalmente pelos autores indicam que forças elásticas não lineares são pequenas até mesmo para grandes deslocamentos da haste. Desta forma, podemos desconsiderar as ordens superiores e, assim, escolher como potencial para as forças elásticas e magnéticas um modelo como a equação (2.10):

$$U = V + w = 1/6 cy^6 + 1/4 dy^4 + 1/2 (k + a)y^2 \quad (2.10)$$

O estudo dos pontos críticos desta equação potencial mostra que podem existir um, três ou cinco pontos fixos para o deslocamento da ponta da haste, como o experimento sugere. Quando se decreta a distância entre os ímãs o número de pontos fixos passa de um para cinco e para três. Este desdobramento particular é na verdade uma catástrofe do tipo borboleta. A teoria da catástrofe diz que em geral quatro parâmetros são necessários para descrever todas as mudanças no número de posições de equilíbrio para um potencial de sexta ordem, então uma forma mais geral do potencial  $U$  é:

$$U = V + w = 1/6 y^6 + 1/4 \lambda_4 y^4 + 1/3 \lambda_3 y^3 + 1/2 \lambda_2 y^2 + \lambda_1 y \quad (2.11)$$

Neste problema  $\lambda_1$  e  $\lambda_3$  representam a distância da simetria (diferente espaçamento magnético ou força magnética). Este caminho pela teoria da catástrofe explica os saltos da quantidade de pontos de equilíbrio (MOON e HOLMES, 1979).

Como o objetivo é obter um modelo teórico que exiba todas as propriedades qualitativas importantes do modelo experimental, apenas as não linearidades que sejam essenciais devem

ser retidas. Desconsideram-se todas as não linearidades provenientes do declive e curvatura da haste, pois, o comportamento elástico da haste é quase linear sob a ação de forças não magnéticas mesmo para deflexões na ordem de 20% a 30% de seu tamanho total. Mantendo apenas os termos não lineares do deslocamento (MOON e HOLMES, 1979).

### 2.5.3 Modelo Contínuo - Método de *Galerkin*

O método de *Galerkin* consiste em escolher uma família de funções ortogonais  $\phi_f(x)$  de forma a satisfazer as condições de contorno. Desta forma, o deslocamento  $v$ , pode ser descrito como:

$$v(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(t) \phi_j(x) \quad (2.12)$$

Uma escolha típica de sistemas com vibrações são os modos normais associados ao problema linear. Substituindo (2.12) na equação de movimento e realizando o produto interno, obtém-se um conjunto infinito de equações ordinárias de segunda ordem para o coeficiente modal  $a_j(t)$  desconhecido (MOON e HOLMES, 1979). Desde que o modo primário seja dominante, uma aproximação de modo único pode ser considerada:

$$v(x,t) = a(t) \phi(x) \quad (2.13)$$

Onde  $\phi(x)$  deve satisfazer:

$$\phi(0) = \phi'(0) = \phi''(L) = 0; \quad D\phi'''(L) + k\phi'(L) = 0; \quad \int_0^L \phi^2 dx = 1$$

A equação diferencial resultante para  $a(t)$  será:

$$m\ddot{a} + \left\{ D \int_0^L (\phi'')^2 dx + k\phi'(L)^2 + F_x(a) \int_0^L (\phi')^2 dx \right\} a - F_y(a)\phi(L) = m\ddot{V}_0 \int_0^L \phi dx \quad (2.14)$$

O termo entre chaves representa a rigidez do modelo, contendo tanto a contribuição da força restauradora elástica quanto da magnética. Para completar o modelo adicionamos o termo de amortecimento e assumimos que as funções  $J_x(a)$  e  $J_y(a)$  têm a forma:

$$J_x = J_0, \text{ uma constante}; \quad J_y = [m\phi(L)](\alpha_1 a + \beta a^3 + \eta a^5 + \dots)$$

Assumindo que  $V_0(t) = \left[ A_0 / \int_0^L \phi dx \right] \cos(\Omega t)$ , então, a equação de movimento para a amplitude modal  $a(t)$  toma a forma:

$$\ddot{a} + \delta \dot{a} - \alpha a + \beta a^3 + \eta a^5 = \Omega^2 A_0 \cos(\Omega t) \quad (2.15)$$

Onde:

$$\alpha = \alpha_1 - \frac{1}{m} \left\{ D \int_0^L (\phi'')^2 dx + k \phi'(L)^2 + F_x(a) \int_0^L (\phi')^2 dx \right\} \quad (2.16)$$

Na ausência de uma força externa ( $A_0 = 0$ ) o problema de bifurcação estática correspondente a equação (2.15) tem, precisamente, a energia potencial da equação (2.10), com  $\alpha = -(k + a)$ ,  $\beta = d$  e  $\eta = c$ . Se o problema tiver apenas três pontos de equilíbrio o termo de quinta ordem deve ser desconsiderado, porque não altera o comportamento qualitativo do problema. Assim a equação (2.15) não dimensional assume a forma:

$$\ddot{A} + \gamma \dot{A} - \frac{1}{2}(1 - A)A^2 = F \cos(\Omega t) \quad (2.17)$$

Por consequência, é encontrada uma equação equivalente ao modelo de *Duffing*, (2.1), que descreve matematicamente o oscilador magneto-elástico conservando todas as características qualitativas do aparelho. No Capítulo IV o aparelho será estudado de maneira mais completa.

### 3 MÉTODOS GEOMÉTRICOS

#### 3.1 Análise do Plano de Fase

A análise do plano de fase é um método gráfico para estudar sistemas lineares e não lineares de segunda ordem. A ideia é trocar a dificuldade da solução analítica pela construção de um espaço abstrato com coordenadas  $(x, \dot{x})$ , onde as soluções  $(x_1(t), x_2(t))$  correspondem a um ponto se movendo em uma curva (STROGATZ, 1994). O resultado é uma família de curvas que descrevem as trajetórias de movimento do sistema em um espaço bidimensional, chamado de plano, espaço ou retrato de fase.

O poder do método é fundamentado no fato que uma vez obtido o plano de fase, a natureza da resposta do sistema para diversas condições iniciais pode ser observado diretamente no gráfico, por meio das trajetórias no plano. Além disto, a análise não se resume ao estudo de não linearidades pequenas e suaves, mas funciona também em estruturas fortemente não lineares. Como desvantagem está o fato de sua aplicação estar restrita a análise de sistemas de segunda ordem, devido à complexidade de computação e estudo geométrico de sistemas com ordem superior (SLOTINE e LI, 1991).

O estudo da estabilidade de sistemas, a partir do método da análise do plano de fase, necessita da introdução de alguns termos relativos à estabilidade de diferentes tipos de pontos fixos. Estes pontos são locais onde uma vez que uma partícula tenha suas coordenadas como condições iniciais, este permanecerá sem movimento para qualquer valor de tempo, também chamado de ponto de equilíbrio.

Segundo Strogatz (1994) é possível classificar os pontos fixos em: a) dizemos que  $x_0$  é um ponto fixo atrator, quando as trajetórias que iniciam próxima de  $x_0$  se aproximam dele enquanto  $t$  evolui, ou seja,  $x(t) \rightarrow x_0$  enquanto  $t \rightarrow \infty$ ; b) se todas as trajetórias do plano são atraídas para  $x_0$  enquanto o tempo evolui, então, diz-se que este ponto é globalmente atrator; c) se todas as trajetórias que se iniciam perto de  $x_0$  permanecem perto dele a qualquer tempo e não apenas se o tempo evolui então o ponto  $x_0$  é dito estável no sentido de *Lyapunov*; d) quando um ponto fixo é *Lyapunov* estável, mas não é atrator, então o ponto é dito estável neutro, trajetórias que se iniciam próximas a ele não serão nem atraídas nem repelidas por este ponto; e) enquanto que se chama assintoticamente estável o ponto que for *Lyapunov* estável e

atrator simultaneamente, e finalmente; f) instável é o ponto que não é nem atrator nem *Lyapunov* estável.

### 3.1.1 Análise do plano de fase para sistemas lineares

A análise do plano de fase de sistemas lineares permite visualizar padrões de deslocamento e, desempenham um papel importante na classificação de soluções em torno de pontos fixos de sistemas não lineares, já que estes sistemas se comportam de modo similar aos lineares quando próximos a pontos de equilíbrio. Pode-se ver a forma geral de sistemas lineares bidimensionais na equação (2.2), assumindo a forma não dimensional:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \quad (3.1)$$

Fazendo  $x_1 = x$  e  $x_2 = \dot{x}$ , tem-se o sistema linear de segunda ordem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = ax_2 + bx_1 \end{cases} \quad (3.2)$$

Que pode ser escrito em uma forma matricial mais geral:  $\dot{x} = Ax$ . Para este caso geral, são procuradas trajetórias na forma:

$$x(t) = e^{\lambda t} \nu \quad (3.3)$$

Onde  $\nu \neq 0$  é um vetor a ser determinado enquanto  $\lambda$  uma taxa de crescimento também a ser encontrada. Para descobrir tais valores substitui-se a equação (3.3) na forma matricial. Desta forma, tem-se:  $\lambda e^{\lambda t} \nu = e^{\lambda t} A \nu$ , cancelando o fator escalar  $e^{\lambda t}$ , vem:

$$A \nu = \lambda \nu \quad (3.4)$$

Assim, a solução existe se:  $\nu$  é um autovetor da matriz  $A$ , sendo  $\lambda$  o correspondente autovalor. Neste caso a solução (3.3) é chamada de autosolução (STROGATZ, 1994). Em geral os autovalores da matriz  $A$  são dados pela equação característica:  $\det(A - \lambda I) = 0$ , sendo  $I$  uma matriz identidade, e podem ser encontrados por meio das equações:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \left( -a \pm \sqrt{a^2 - 4b} \right) / 2 \quad (3.5)$$

Em outras palavras, os autovalores dependem apenas das características da matriz  $A$ . Para o caso de  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , o teorema da álgebra linear determina que os correspondentes autovetores  $\nu_1$  e  $\nu_2$  são linearmente independentes, e conseqüentemente abrangem todo o plano. Em

particular, qualquer condição inicial  $x_0$  pode ser descrita como uma combinação dos autovetores:  $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$ . A solução geral é encontrada sob a forma:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \quad (3.6)$$

Para o caso que  $\lambda_1 = \lambda_2$ , tem-se:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 t e^{\lambda_1 t} v_2 \quad (3.7)$$

Sistemas lineares como o da equação (3.1) apresentam apenas um único ponto fixo, a origem (SLOTINE e LI, 1991). Entretanto, as trajetórias assumem diferentes formas nas proximidades deste ponto de equilíbrio, características que dependem diretamente dos valores de  $a$  e  $b$ . A Figura 3.1 mostra o retrato de fase dos possíveis casos que podem ocorrer em sistemas lineares.

Quando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são valores reais com mesmo sinal, temos o primeiro caso, se ambos são positivos, o ponto é chamado de nó instável, como mostra a Figura 3.1(a), isto se deve as características da solução e sua derivada,  $x(t)$  e  $\dot{x}(t)$  que divergem exponencialmente do zero. Enquanto a Figura 3.1(b) mostra um nó estável, quando os autovalores são negativos e ambas as soluções convergem para zero.

No segundo caso temos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  valores reais com sinais contrários, um dos polos se torna instável e graças a ele algumas trajetórias divergem do zero, chamado de ponto de sela pode ser visto na Figura 3.1(c). Quando os autovalores são números complexos conjugados com parte real nula, teremos um centro como ponto fixo, Figura 3.1(d), todas as trajetórias são elípticas e o ponto fixo está no centro destas elipses.

O último caso é o de autovalores complexos conjugados com parte real diferente de zero, quando a parte real for negativa teremos um foco estável, Figura 3.1(e), as trajetórias circulam a origem antes de convergirem para o ponto de equilíbrio, diferente do caso das partes reais dos autovalores serem positivas, desta forma, as trajetórias divergem da origem para o infinito, como vemos na Figura 3.1(f).

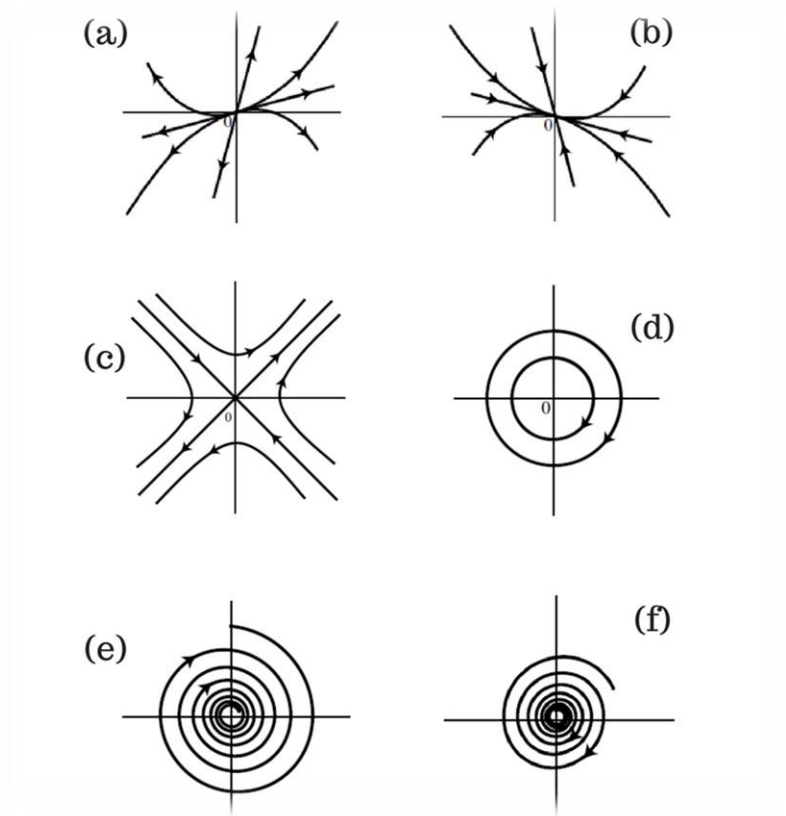


Figura 3.1 - Retrato de fase de sistemas lineares: (a) nó instável, (b) nó estável, (c) ponto de sela, (d) centro, (e) foco estável e (f) foco instável.

Fonte: Adaptado de Kovacic e Brennan (2011)

### 3.1.2 Análise do plano de fase para sistemas não lineares

Em contraste com os sistemas lineares que apresentam apenas um ponto fixo na origem, sistemas não lineares apresentem múltiplos pontos fixos, isto significa que o parâmetro não linear perturba a existência de pontos fixos diferentes do trivial localizado na origem (KOVACIC e BRENNAN, 2011). Tomando a equação de Duffing, (2.1), como modelo a ser estudado para esta seção e, representando-o em uma forma adimensional, vem:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x \pm \beta x^3 = U \cos(\Omega t) \quad (3.8)$$

Sendo  $\omega$  frequência natural do sistema não amortecido e  $\xi$  o coeficiente de amortecimento.

Com as seguintes relações com os parâmetros dimensionais da equação (2.1):

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \quad (3.9)$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{mk_1}} \quad (3.10)$$

$$\beta = \frac{k_3}{m} \quad (3.11)$$

$$U = \frac{F}{m} \quad (3.12)$$

Finalmente, define-se a equação de Duffing em termos de variáveis de estado, **(3.13)**, para então realizar a análise local. Fazendo:  $x_1 = x$  e  $x_2 = \dot{x}$ , tem-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2\xi\omega x_2 - \omega^2 x_1 \pm \beta x_1^3 + U \cos(\Omega t) \end{cases} \quad (3.13)$$

A partir deste ponto aplica-se o método direto de *Lyapunov* para estudar a dinâmica das trajetórias dos estados do sistema de Duffing. A técnica é fundamentada na relação entre a estabilidade de um modelo, com a energia dissipada durante seu movimento (SLOTINE e LI, 1991). Nesta aproximação, a função de energia potencial pode ser considerada uma função dita de *Lyapunov*, e refletirá o trabalho necessário para deslocar o sistema de um ponto de equilíbrio. A função de *Lyapunov* que descreve o sistema de Duffing tem a forma:

$$V(x) = \frac{\omega^2}{2} x^2 + \frac{\beta}{4} x^4 = 0 \quad (3.14)$$

Derivando, tem-se:

$$\dot{V}(x) = \omega^2 x + \beta x^3 \quad (3.15)$$

Desta forma, os pontos de equilíbrio da função de *Lyapunov* podem ser encontrados ao igualar sua derivada à zero:

$$\dot{V}(x) = x(\omega^2 + \beta x^2) = 0 \quad (3.16)$$

Assim, para que o sistema atinja o equilíbrio os valores de  $x$  devem ser:

$$x_0 = 0; x_1 = \sqrt{\frac{-\omega^2}{\beta}}; x_2 = -\sqrt{\frac{-\omega^2}{\beta}}. \text{ Usando as equações (3.9) e (3.11):}$$

$$x_0 = 0; x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{-k_1}{k_3}} \quad (3.17)$$

Fica claro que quando os parâmetros  $k_1$  e  $k_3$  têm o mesmo sinal, os pontos fixos  $x_2$  e  $x_3$  serão complexos e, assim o sistema terá apenas um ponto de equilíbrio na origem. Enquanto que sinais opostos garantem, no mínimo, três pontos de equilíbrio.



Pode-se dividir a análise de estabilidade do sistema em dois casos: a) quando  $k_1$  e  $k_3$  tiverem os mesmos sinais e; b) quando os parâmetros,  $k_1$  e  $k_3$ , tiverem sinais contrários.

No caso: a)  $k_1$  e  $k_3$  com mesmo sinal; como resultado da existência de apenas um ponto de equilíbrio, o comportamento local do sistema não linear pode ser descrito pelos mesmos padrões vistos na Figura 3.1. No entanto, para: b)  $k_1$  e  $k_3$  com sinais contrários, o sistema apresentará um ponto fixo trivial e dois não triviais. O parâmetro linear,  $k_1$ , determina a estabilidade dos pontos fixos, enquanto o não linear,  $k_3$ , altera a localização dos pontos fixos não triviais.

O método direto de *Lyapunov* se baseia no teorema de Lagrange, que relaciona o ponto de mínimo da energia potencial com a posição de repouso de um sistema mecânico, e desta forma, este mínimo local é uma posição de equilíbrio estável, caso contrário, a posição é instável (SLOTINE e LI, 1991). Usamos, então, o teorema de Lagrange para analisar a Figura 3.2.

Para  $k_1$  negativo e  $k_3$  positivo, Figura 3.2(a), vê-se um poço de potencial duplo com pontos de mínimo local e um ponto de máximo local. Desta forma, conclui-se que o ponto trivial, máximo local, será instável, enquanto os pontos de equilíbrios fora da origem serão estáveis. Na Figura 3.2(b) temos um sistema com  $k_1$  positivo e  $k_3$  negativo, neste caso, observa-se apenas um ponto de mínimo na origem, por isso apenas o ponto trivial é estável.

Quando os pontos de equilíbrio não estão localizados na origem, definindo a diferença entre o estado original e o ponto singular como um novo conjunto de variáveis de estado, pode-se mudar o ponto singular para a origem, sem perda de generalidades, por meio da expansão de *Taylor*. Como resultado o comportamento local do sistema, independentemente do caso, também podem ser aproximados pelos padrões da Figura 3.1 (SLOTINE e LI, 1991).

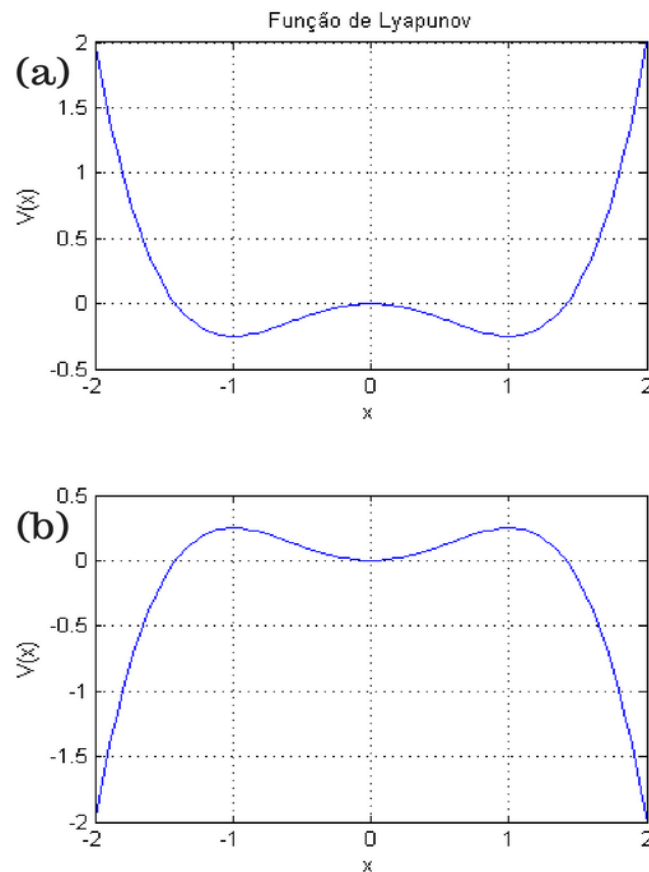


Figura 3.2 - Poço de potencial duplo não parabólico a partir de (3.14). (a)  $K_1 < 0$  e  $K_3 > 0$ , (b)  $K_1 > 0$  e  $K_3 < 0$ .

Fonte: O autor (2018)

### 3.1.3 Bifurcação

Na Figura 3.2 percebe-se que a variação dos parâmetros do sistema causa alterações qualitativas na dinâmica, em particular, na existência ou na estabilidade dos pontos fixos. Esta mudança na dinâmica da estrutura é chamada bifurcação. Este fenômeno é importante para proporcionar modelos para a transição de instabilidade quando algum parâmetro de controle está variando (STROGATZ, 1994).

Existem diferentes modelos de bifurcação, mas para a equação de Duffing é necessário conhecer apenas a bifurcação do tipo forquilha e a de Hopf. A bifurcação forquilha é comum em sistemas físicos que apresentam simetria, neste caso, os pontos fixos tendem a surgir ou desaparecer em pares simétricos (STROGATZ, 1994). Existem dois tipos desta bifurcação: a) supercrítica e; b) subcrítica. Ao passo que a bifurcação de Hopf corresponde ao surgimento de uma solução periódica a partir de uma solução estacionária.

A Figura 3.3 mostra uma bifurcação supercrítica considerando o oscilador de Duffing, (3.13), que pode apresentar até três soluções. Nota-se que quando  $k_1$  passa de  $-\infty$  para  $\infty$ , o sistema vai de uma solução real,  $x = 0$ , para três pontos de equilíbrio. Note que a solução espiral estável  $x = 0$  se torna instável quando  $k_1$  passa de valores negativos para positivos (STROGATZ, 1994).

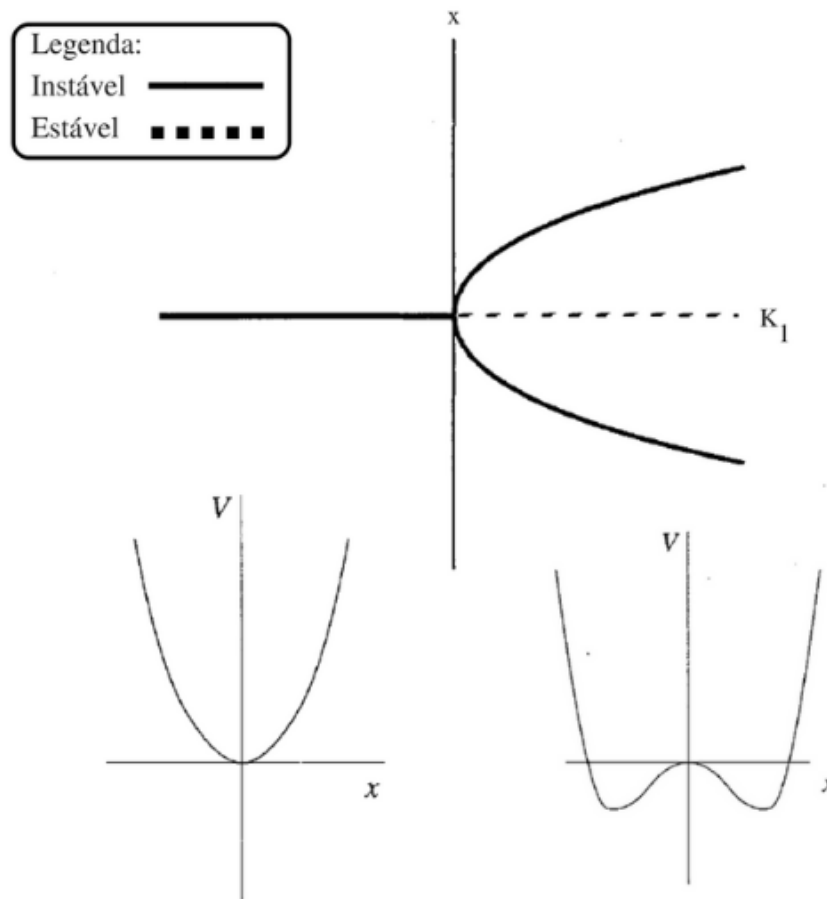


Figura 3.3 - Bifurcação forquilha supercrítica

Fonte: Adaptado de Strogatz (1994)

#### 3.1.4 Ciclo Limite

Uma propriedade inerente aos sistemas não lineares que pode ser observada por meio da técnica da análise do espaço de fase é o ciclo limite. Sistemas lineares até podem exibir trajetórias orbitais fechadas, mas estas não serão isoladas, o que diverge da definição formal dos ciclo limites. Segundo Strogatz (1994) ciclo limites são trajetórias fechadas e isoladas, o que significa que as trajetórias vizinhas não são fechadas e tendem a se aproximar quando o ciclo limite é estável, ou a se afastar quando instáveis.

Para determinar a existência de ciclo limites em qualquer sistema em particular, deve-se usar o teorema de Poincaré-Bendixson, que limita as possibilidades dinâmicas no espaço de fase: Se a trajetória está confinada em uma região fechada e limitada que não envolve um ponto fixo, então, a trajetória deve eventualmente se aproximar de uma órbita fechada. Nada mais complicado pode acontecer (STROGATZ, 1994).

Na Figura 3.4 tomamos o modelo de Duffing, equação (3.8), com os seguintes parâmetros:  $\beta = -1$ ;  $\omega = 1$ ;  $\xi = 0,05$ ;  $\Omega = 1,4$  e  $U = 0.1$ , como exemplo. A Figura 3.4(a) mostra um comportamento complexo da trajetória do sistema, enquanto que a Figura 3.4(b) demonstra que esta conduta complicada só acontece em um período inicial, ao restringimos o tempo, a trajetória estabelece uma órbita regular periódica, um ciclo limite.

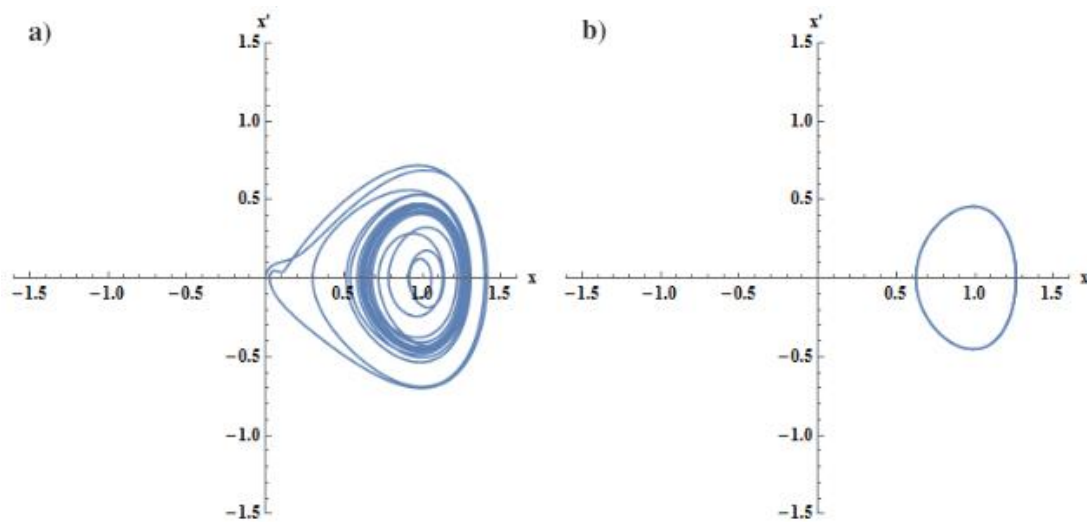


Figura 3.4 - Espaço de fase do modelo de Duffing, equação (3.8), com parâmetros  $\beta = -1$ ;  $\omega = 1$ ;  $\xi = 0,05$ ;  $\Omega = 1,4$  e  $U = 0.1$ : (a) estado transitente; (b) estado estacionário.

Fonte: O autor (2018).

### 3.1.5 Caos

Em sistemas com ordem superior a duas dimensões o teorema de Poincaré-Bendixson não pode ser aplicado, desta maneira, uma trajetória confinada em uma região limitada do espaço pode vagar eternamente sem dirigir-se a um ponto fixo ou a uma órbita fechada. Em alguns casos, a trajetória pode ser atraída para um objeto geométrico complexo chamado de atrator estranho, um conjunto fractal, no qual o movimento é aperiódico e sensível a pequenas mudanças nas condições iniciais. O que torna o sistema imprevisível em longo prazo (STROGATZ, 1994).

Não existe uma definição universal para o termo caos. Entretanto, três ingredientes são fundamentais para explicar o termo. Segundo Strogatz (1994), caos é um comportamento aperiódico em longo prazo em um sistema determinístico que exibe uma sensível dependência às condições iniciais.

Comportamento aperiódico significa que o sistema não se dirige nem a um ponto de equilíbrio, nem a uma órbita periódica, ou quase periódica quando  $t \rightarrow \infty$ . Sistemas determinísticos são aqueles que não estão sujeitos a ruídos ou entradas randômicas, o comportamento irregular surge a partir da não linearidade e não de ruídos externos. E dependência sensível a condições iniciais significam que trajetórias próximas se separam exponencialmente rápidas, que significa dizer que o sistema apresenta um expoente de *Lyapunov* positivo (STROGATZ, 1994).

A Figura 3.5 indica a sensibilidade do sistema determinístico (3.8), com os seguintes parâmetros:  $\beta = -1$ ;  $\omega = 1$ ;  $\xi = 0,05$ ;  $\Omega = 1,4$ , à variação da amplitude da força de excitação, apenas em regime estacionário. Na Figura 3.5(a) nota-se a dobra do período de oscilação de uma órbita fechada, Figura 3.4(b), com  $U = 0,33$ ; a Figura 3.5(b) demonstra o comportamento complexo de uma trajetória vagando em uma região limitada do espaço de estados, encontrada com amplitude  $U = 0,345$ ; já a Figura 3.5(c) descreve uma trajetória com padrão característico para  $U = 0,37$ ; enquanto que a Figura 3.5(d) volta a exibir uma trajetória com comportamento caótico, para  $U = 0,375$ .

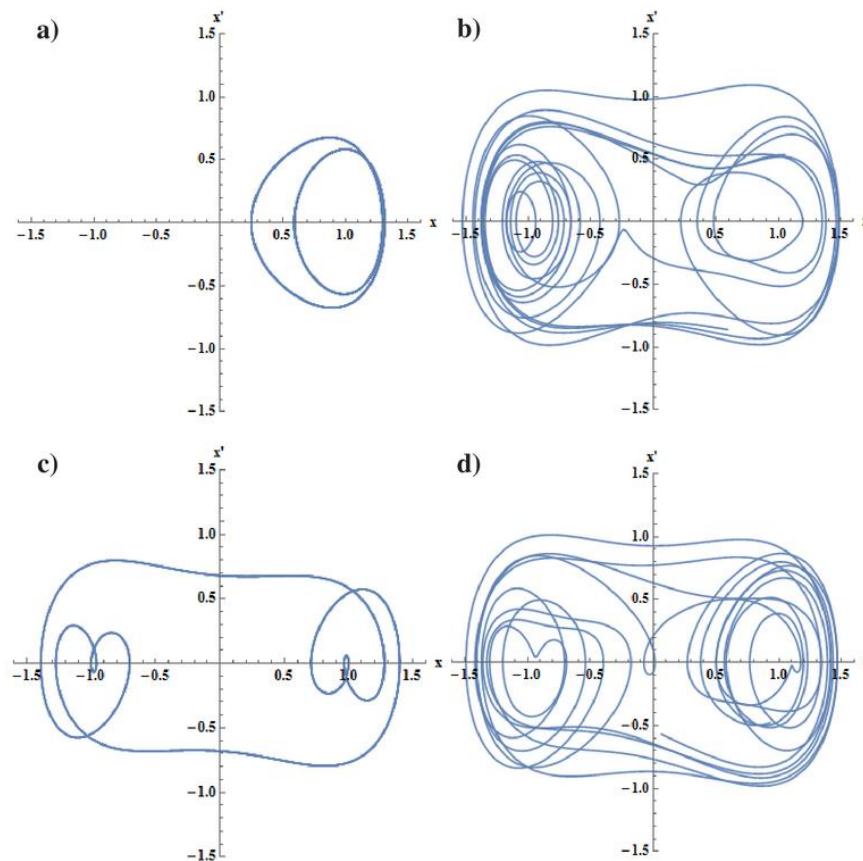


Figura 3.5 - Espaço de fase do modelo de Duffing, equação (3.8), com parâmetros  $\beta = -1$ ;  $\omega = 1$ ;  $\xi = 0,05$ ;  $\Omega = 1,4$  : (a)  $U = 0,33$  ;(b)  $U = 0,345$ ;(c)  $U = 0,37$ ; (d)  $U = 0,375$ .

Fonte: O autor (2018)

### 3.2 Função Descritiva

A tendência em direção a sistemas menores, mais leves e com alta performance, além da crescente utilidade das operações digitais nos sistemas de controle conspiram para ampliar o espaço ocupado pelos sistemas não lineares. As técnicas e a teoria da função descritiva representam uma poderosa ferramenta matemática para entender e melhorar o comportamento de tais sistemas. Esta técnica é tratada de forma muito completa em vários textos para o caso de sistemas com uma única não linearidade (ATHERTON, 1982) (MEES e BERGEN, 1975) (GELB e VANDER VELDE, 1968) (MOHAN, 1981).

As bases para a técnica da função descritiva foram estabelecidas no trabalho de Krylov e Bogoliubov na área de mecânica não linear. Para apresentar a técnica certos formalismos matemáticos devem ser expostos, em especial equações diferenciais, o estudo da resposta a excitações senoidais, bem como, certos conceitos como a transformadas de *Laplace*, expansões de *Fourier* e o domínio da frequência. A técnica permite estudar problemas de

análise e design de sistemas não lineares por meio da simples extensão dos métodos de análise de sistemas lineares.

A principal motivação da técnica é compreender o comportamento de sistemas não lineares, pelo simples fato que todo sistema real é não linear exceto em regimes limitados de operação. Uma maneira comum de tratar este problema é lineariza-lo. Entretanto, este método explica apenas efeitos de pequenas variações em torno do ponto de linearização. Esta aproximação não é adequada para entender fenômenos como oscilações não lineares ou para estudar os efeitos limitantes ou prejudiciais da não linearidade (TAYLOR, 1999).

A ideia básica da abordagem da função descritiva para modelar e estudar o desempenho de sistemas não lineares é substituir cada elemento não linear por um descritor quase linear cujo ganho é uma função da amplitude de excitação. Este descritor possui uma vantagem substancial sobre a linearização, pois, não apresenta limite para o intervalo de operação em que pode ser aplicado. A principal limitação da técnica é a exigência quanto à forma do sinal de entrada da não linearidade que deve se aproximar da forma usada para calcular a função descritiva (GELB e VANDER VELDE, 1968).

Segundo Taylor (1999) duas classes particulares de funções descritivas tiveram sucesso: a) função descritiva com entrada senoidal e; b) função descritiva com entrada aleatória. Ambas dependentes da forma do sinal de entrada a ser considerado. Outras classificações foram desenvolvidas e usadas para tratar fenômenos mais complexos. A abordagem da função descritiva com entrada senoidal, aplicada neste trabalho, geralmente é usada para entender fenômenos periódicos como a análise de ciclo limites e a caracterização do comportamento entrada/saída de plantas não lineares no domínio da frequência.

### 3.2.1 Função Descritiva com entrada senoidal

Uma das características dos elementos não lineares é a dependência da relação de ganho quanto à frequência e amplitude de excitação. Se o sinal de entrada da não linearidade se aproxima de uma forma senoidal, então, a função descritiva determinará adequadamente o ganho do elemento em função da frequência e amplitude, por meio de uma simples substituição do elemento por um ganho linear equivalente.

Considerando como a entrada do elemento não linear um sinal senoidal puro com magnitude e frequência constante,  $A$  e  $\Omega$ , e ângulo de fase  $\theta$  variando entre  $0$  e  $2\pi$ , na forma:

$$x(t) = A \sin(\Omega t + \theta) \quad (3.18)$$

Neste caso, a saída do elemento é uma função do sinal de entrada e em alguns casos esta relação é complexa. Para enfatizar o fato que a saída  $y(t)$  depende da entrada  $x(t)$ , indica-se na notação (3.19) uma dependência do valor atual de  $x(t)$  e sua primeira derivada:

$$y(t) = y[x(t), \dot{x}(t)] \quad (3.19)$$

A técnica da função descritiva foi inicialmente desenvolvida para sistemas com uma única não linearidade. Desta forma, deve-se, então, formular o sistema como na Figura 3.6 antes de realizar a análise. Apesar de tal divisão nem sempre poder ser efetuada, quando possível, o elemento não linear resultante será mais simples de ser manipulado.

Segundo Gelb e Vander Velde (1968) qualquer sistema de duas partes contendo uma não linearidade explícita pode sempre ser reduzido a diagramas de bloco topologicamente e matematicamente equivalentes. Nestes diagramas o elemento não linear pode aparecer tanto no bloco direto quanto na realimentação Figura 3.6, com entrada e saída em uma relação de causa e efeito normal ou reversa.

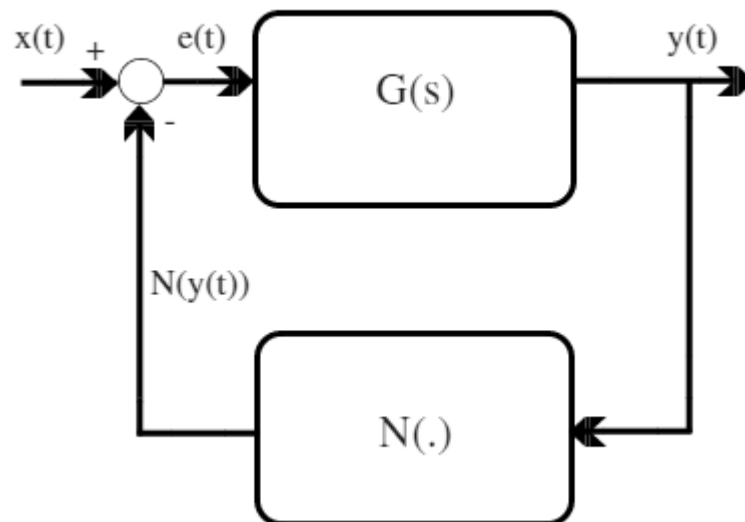


Figura 3.6 - Configuração do sistema com única não linearidade dominante.

Fonte: O autor (2018)

Sendo que  $G(s)$  descreve a dinâmica de um subsistema linear com entrada  $e(t)$  e saída  $y(t)$ . A entrada do subsistema é então dada pela subtração entre uma entrada externa  $x(t)$  e uma função não linear de  $y(t)$ . Assim, tem-se uma não linearidade com única entrada e única saída,



$N(y)$ , e uma dinâmica linear de ordem arbitrária. Redefinindo o sistema da Figura 3.6 como um sistema de equações tem-se:

$$\begin{aligned} Y(s) &\triangleq \mathcal{L}\{y(t)\} \triangleq G(s)\mathcal{L}\{e(t)\} \\ e(t) &= x(t) - N(y(t)) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Onde  $\mathcal{L}\{\cdot\}$  denota a transformada de *Laplace*. Desta maneira, a equação (3.20) mostra a formulação convencional de uma planta linear no caminho direto e uma não linearidade na realimentação. Esta única não linearidade pode ser um atuador, um sensor ou um subsistema não linear, em todo caso a análise a seguir pode ser usada por meio da configuração vista na Figura 3.6.

### 3.2.2 Definição da função descritiva.

A filosofia principal da técnica da função descritiva é simplesmente substituir a não linearidade do sistema por um ganho linear aproximado, de modo a tornar semelhante a resposta do elemento não linear e sua aproximação. Isto é uma tentativa de estender o conceito de função de transferência aos problemas não lineares (MOHAN, 1981).

Para investigar as condições de oscilação do sistema, consideramos a entrada do elemento não linear essencialmente senoidal na forma  $y \cong A \text{sen}(\Omega t)$ . Assim, a saída  $N(y, \dot{y})$  será periódica e pode ser representada por uma série de Fourier na forma da equação (3.21).

$$N(A \text{sen} \Omega t, A \Omega \cos \Omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(A, \Omega) \text{sen}[n\Omega t + \phi_n(A, \Omega)] \quad (3.21)$$

Por definição a função descritiva,  $N(A, \Omega)$ , pode ser descrita como o ganho complexo da harmônica fundamental na presença de uma força externa (TAYLOR, 1999) (GELB e VANDER VELDE, 1968). Nesta definição os conceitos de magnitude de transferência e mudança de fase estão incorporados.

De fato, a função descritiva de um elemento não linear é análoga à função de transferência de um elemento linear. Assim sendo, o método da resposta em frequência explorado com tanto sucesso na análise e síntese de sistemas lineares pode ser usado para o caso de problemas não lineares. A Figura 3.7 mostra a definição da função descritiva incluindo as harmônicas de ordem superior, aqui chamados resíduos, que são excluídas da resolução formal.

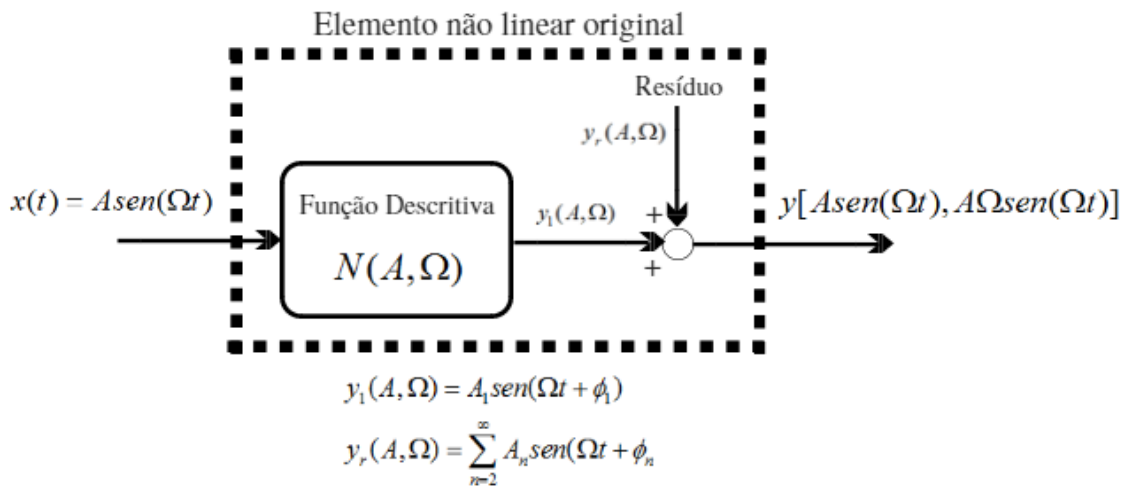


Figura 3.7 - Definição da função descritiva.

Fonte: O autor (2018)

Para encontrar uma equação que descreva a função descritiva em termos de  $y(x, \dot{x})$ , multiplicamos ambos os lados da equação (3.21) por  $\text{sen}(\Omega t)$  e  $\cos(\Omega t)$ , e integrado, pode-se determinar os primeiros coeficientes da série de Fourier (GELB e VANDER VELDE, 1968). As relações seguintes serão encontradas:

$$A_1 \cos \varphi_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(A \text{sen} \Omega t, A\Omega \cos \Omega t) \text{sen}(\Omega t) d(\Omega t) \quad (3.22)$$

$$A_1 \text{sen} \varphi_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(A \text{sen} \Omega t, A\Omega \cos \Omega t) \cos(\Omega t) d(\Omega t)$$

Agora, multiplicando a segunda relação pela unidade imaginária  $i$ , somando as duas relações e dividindo ambos os lados da equação resultante por  $A$ , obtemos:

$$\frac{A_1}{A} e^{i\varphi_1} = \frac{i}{\pi A} \int_0^{2\pi} y(A \text{sen} \Omega t, A\Omega \cos \Omega t) e^{-i\varphi_1} d(\Omega t) \quad (3.23)$$

Usando a relação:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \text{sen} \varphi \quad (3.24)$$

Comparando as equações (3.21) e (3.24), a equação, de modo geral, para a função descritiva em termos da não linearidade do sistema se torna:

$$N(A, \Omega) = \frac{i}{\pi A} \int_0^{2\pi} y(A \text{sen} \Omega t, A\Omega \cos \Omega t) e^{-i\Omega t} d(\Omega t) \quad (3.25)$$

Esta equação está na forma de ganho complexo estático. Expandindo o lado direito desta equação podemos encontrar a equação na forma de uma dinâmica proporcional mais um elemento derivativo (GELB e VANDER VELDE, 1968).

$$N(A, \Omega) = n_p(A, \Omega) + in_q(A, \Omega) \quad (3.26)$$

Onde  $n_p(A, \Omega)$  e  $n_q(A, \Omega)$  são ganhos da não linearidade em fase, associado ao seno, e em quadratura, associado à função cosseno. Para sistemas com não linearidades estáticas, ímpares e sem memória, deve-se restringir a integral que define a função descritiva a apenas (GELB e VANDER VELDE, 1968):

$$N(A) = \frac{4}{\pi A} \int_0^{\pi/2} y(A \text{sen} \Omega t) \text{sen}(\Omega t) d(\Omega t) \quad (3.27)$$

### 3.2.2.1 Função descritiva de não linearidades do tipo polinomial

Funções polinomiais são particularmente úteis devido à relativa facilidade com que podem se ajustar as características de elementos não lineares. Voltando a equação de Duffing onde ocorre uma não linearidade polinomial cúbica, na forma  $y(x) = k_3 x^3(t)$ . Deve-se assumir  $x(t) = A \text{sen}(\Omega t)$ , para assim escrever diretamente sua função descritiva análoga, usando a equação (3.27), para isso faz-se:

$$y(A \text{sen}(\Omega t)) = k_3 [A \text{sen}(\Omega t)]^3 \quad (3.28)$$

Aplicando a equação (3.27) tem-se:

$$N(A) = \frac{4}{\pi A} \int_0^{\pi/2} k_3 A^3 \text{sen}^3(\Omega t) \text{sen}(\Omega t) d(\Omega t) \quad (3.29)$$

$$N(A) = \frac{4k_3 A^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \text{sen}^4(\Omega t) d(\Omega t) \quad (3.30)$$

Usando a relação trigonométrica:

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^4(\Omega t) d(\Omega t) = \left( \frac{3}{8}(\Omega t) - \frac{\text{sen}(2\Omega t)}{4} + \frac{\text{sen}(4\Omega t)}{32} \right) \Bigg|_0^{\pi/2} \quad (3.31)$$

O descritor quase linear é, então, encontrado para a não linearidade cúbica:

$$N(A) = \frac{3k_3 A^2}{4} \quad (3.32)$$

Nota-se que a não linearidade cúbica atua como um pequeno ganho para altos valores de amplitude de excitação e ganho alto para pequenas amplitudes (TAYLOR, 1999). Finalmente, a partir daqui, utiliza-se as técnicas padrões de análise de sistemas lineares para estudar a equação de Duffing.

### 3.2.3 Método de análise de ciclo limites

Nesta subseção a função descritiva para uma entrada senoidal será aplicada para estudar oscilações em estado estacionário. Para tanto, certas condições devem ser preenchidas pela não linearidade e pelo sistema que a contem: a) o elemento não linear deve ser invariante no tempo; b) nenhuma subharmônica é gerada pela não linearidade em resposta a uma excitação senoidal e; c) o sistema filtra as harmônicas de saída da não linearidade de forma que apenas uma quantidade trivial do sinal é realimentada. Esta última condição é chamada hipótese do filtro e, é visto como fundamental para o sucesso ou falha da técnica (TAYLOR, 1999).

Além do ciclo limite, outras duas oscilações em estado estacionário podem ser observadas: a) oscilações forçadas cuja frequência e amplitude dependem explicitamente do sinal de excitação; b) Oscilações livres associadas a sistemas conservativos, não dissipativos, que são modos periódicos de oscilação relacionados às condições iniciais e, finalmente, c) ciclo limites que indicam modos periódicos de oscilação, independentes das condições iniciais, que ocorrem em sistemas não conservativos (GELB e VANDER VELDE, 1968).

Ciclo limites podem ser comportamentos desejáveis, como no caso de vibrações que minimizam os efeitos da fricção de sistemas mecânicos, ou indesejáveis, que podem acarretar falhas mecânicas em sistemas de controle. Apesar de não ser obrigatório conhecer a forma exata do ciclo limite, um pré-requisito para o design de sistemas é o conhecimento aproximado de sua amplitude e frequência.

Para realizar o estudo do ciclo limite, deve-se considerar um sistema na forma da Figura 3.8(a), onde o elemento não linear é caracterizado por sua função descritiva  $N(A, \Omega)$  e a parte linear por sua função de transferência em frequência  $L(j\Omega)$ . A Figura 3.8(b) mostra o sistema quase linearizado.

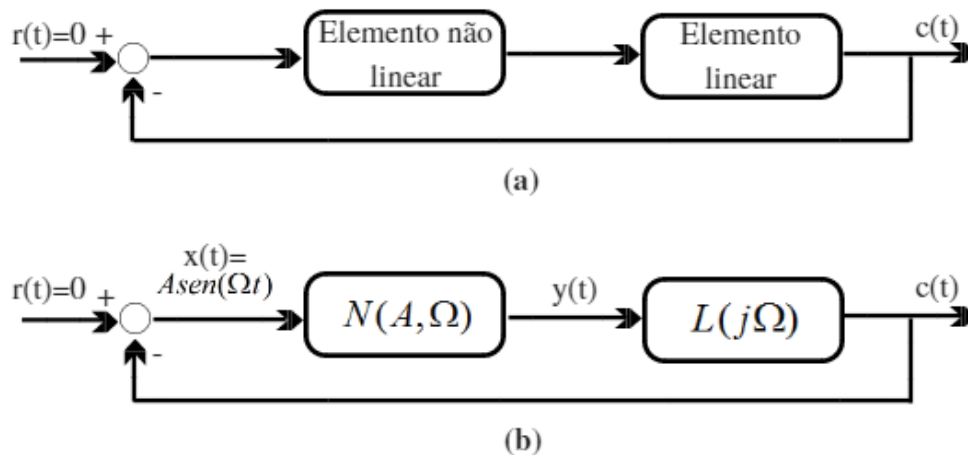


Figura 3.8 - (a) Sistema com única não linearidade em malha fechada; (b) sistema linearizado correspondente usando função descritiva.

Fonte: O autor (2018)

Por meio da função descritiva as técnicas de análise do domínio da frequência da teoria linear poderão ser aplicadas no sistema quase linearizado. Qualquer oscilação não amortecida encontrada será interpretada como um ciclo limite no sistema não linear original.

Desde que a entrada seja desprezada, a seguinte relação pode ser encontrada:

$$X(j\Omega) = -L(j\Omega)Y(j\Omega) \quad (3.33)$$

Tratando a função descritiva como um ganho linear, entre x e y tem-se:

$$Y(j\Omega) = N(A, \Omega)X(j\Omega) \quad (3.34)$$

Escrevendo as equações (3.33) e (3.34) em uma forma matricial obtém-se:

$$\begin{pmatrix} N(A, \Omega) & -1 \\ 1 & L(j\Omega) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X(j\Omega) \\ Y(j\Omega) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.35)$$

Sistema que possui solução não trivial desde que a matriz quadrada possua determinante nulo:

$$\begin{vmatrix} N(A, \Omega) & -1 \\ 1 & L(j\Omega) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.36)$$

Assim:

$$1 + N(A, \Omega)L(j\Omega) = 0 \quad (3.37)$$

A partir da solução desta equação (3.37) a amplitude e frequência do ciclo limite podem ser determinadas, condição fácil de ser verificada usando o diagrama de *Nyquist* de  $L(j\Omega)$  (GELB e VANDER VELDE, 1968).

### 3.2.3.1 Determinação gráfica do ciclo limite.

Aplicando o método de análise de ciclo limites ao modelo de Duffing. Sendo assim, deve-se seguir a metodologia da técnica dividindo os elementos lineares e não lineares da equação de Duffing como na Figura 3.8(a). Como se sabe, a função descritiva da não linearidade do modelo tem a forma da equação (3.32), resta descobrir a função de transferência dos elementos lineares para que seja possível representar a equação de Duffing na forma quase linearizada da Figura 3.8(b). Assim, sendo:

$$l(t) = \ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x \quad (3.38)$$

Aplicando a transformada de Laplace, obtém-se:

$$L(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} \quad (3.39)$$

Substituindo o operador de Laplace  $s$  por  $j\Omega$ , determina-se a equação no domínio da frequência, na forma:

$$L(j\Omega) = \frac{1}{(j\Omega)^2 + 2\xi\omega(j\Omega) + \omega^2} = \frac{(\omega^2 - \Omega^2) - 2j\xi\omega\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\omega^2\Omega^2} \quad (3.40)$$

Equação que pode ser separada em parte real e imaginária:

$$\Re(L(j\Omega)) = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\omega^2\Omega^2} \quad (3.41)$$

$$\Im(L(j\Omega)) = \frac{-2j\xi\omega\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\omega^2\Omega^2} \quad (3.42)$$

Aplicando-se as equações (3.32), (3.41) e (3.42) na (3.37), tem-se:

$$[N(A, \Omega)][\Re\{L(j\Omega)\} + j\Im\{L(j\Omega)\}] = -1 \quad (3.43)$$

Esta relação é satisfeita quando as partes reais e imaginárias de ambos os lados da equação são igualadas, o que resulta no par de equações:

$$N(A, \Omega)[\Re\{L(j\Omega)\}] = -1 \quad (3.44)$$

$$\Im\{L(j\Omega)\} = 0 \quad (3.45)$$

Uma forma particularmente útil da equação (3.44) é:

$$\Re\{L(j\Omega)\} = \frac{-1}{N(A,\Omega)} \quad (3.46)$$

Plotando  $\Re\{L(j\Omega)\}$  e  $-1/N(A,\Omega)$  no mesmo grupo de coordenadas, determina-se a existência e as características de ciclo limites na interseção das duas curvas. A frequência do ciclo limite pode ser indicada na curva de  $\Re\{L(j\Omega)\}$ , enquanto a amplitude pode ser aferida no gráfico da curva de  $-1/N(A,\Omega)$ .

A determinação típica de um ciclo limite pode ser vista na Figura 3.9, onde a equação (3.41), do elemento linear de segunda ordem, e a função descritiva estão representadas. As setas da figura indicam a direção de aumento da amplitude,  $A$ , em  $-1/N(A,\Omega)$  e da frequência,  $\Omega$ , no lugar geométrico do elemento linear.

Para construir a Figura 3.9 utilizamos a equação de Duffing. Discuti-se então, a influência do parâmetro linear  $k_1$  na existência do ciclo limite. Quando este parâmetro tiver valores negativos vemos um gráfico polar como o da Figura 3.9, onde nota-se um ponto de ciclo limite. Enquanto que, sendo  $k_1$  positivo não se pode observar este comportamento, pois os gráficos nunca se encontrarão, salvo no caso do coeficiente de amortecimento também apresentar valor negativo.

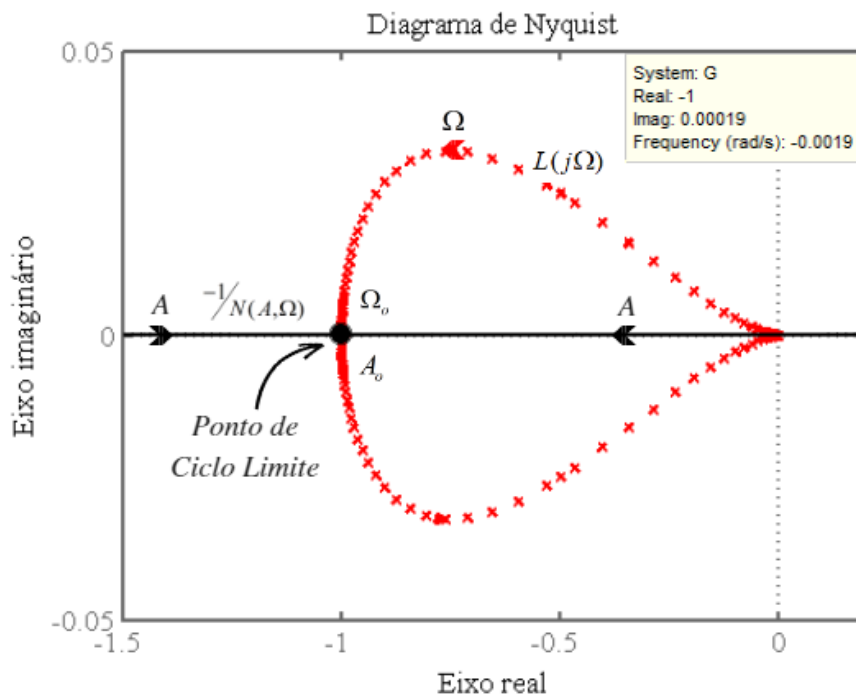


Figura 3.9 - Diagrama de Nyquist com parâmetros  $\xi = 0.05$ ,  $\omega_n = 1$  e  $k_3 = 1$ .

Fonte: O autor (2018)

A estabilidade de ciclo limites pode ser atestada graficamente, o argumento é emprestado da teoria de estabilidade de sistemas lineares. Se a amplitude do ciclo limite for positiva, requer um sistema estável onde a energia é dissipada até a amplitude decair a um valor fixo. Enquanto que, se a amplitude for negativa, requer um sistema instável onde a energia é absorvida pelo sistema até a amplitude atingir um determinado valor. Estes comportamentos garantem um ciclo limite localmente estável (GELB e VANDER VELDE, 1968).

### 3.2.4 Análise da resposta em frequência

Na área de análise dinâmica estrutural, a técnica da resposta em frequência é provavelmente uma das mais usadas para estudar as características de sistemas não lineares. A técnica é capaz de resumir a maior parte das informações necessárias para entender a dinâmica de uma estrutura. Além de ser uma ferramenta eficaz para identificar não linearidades (WORDEN e TOMLINSON, 2001).

O estudo do comportamento da relação das amplitudes de entrada e saída  $A_o / A_i$ , e da fase  $\phi$  em função da frequência é chamado de resposta em frequência (FELICIO, 2010). Os conjuntos de gráficos, chamados gráficos da resposta em frequência, juntos especificam todas as propriedades de sistema sujeito a uma entrada harmônica. Se o sinal  $X_{sen}(\Omega t)$  é a entrada de um sistema e a resposta resultante é  $Y_{sen}(\Omega t + \phi)$ , então a função da resposta em frequência será:

$$H(\omega) = \left| \frac{Y}{X}(\omega) \right| e^{i\phi(\omega)} \quad (3.47)$$

O método do balanço harmônico é uma das técnicas que podem ser usadas como um meio de aproximar a técnica da resposta em frequência para sistemas não lineares. No caso de sistemas não lineares, a relação complexa entre o espectro de saída e de entrada produzirá uma componente de resposta com frequência diferente da de excitação. O balanço harmônico imita a análise simplesmente assumindo que a resposta de uma excitação senoidal também será senoidal com mesma frequência (WORDEN e TOMLINSON, 2001). Desta forma, admite-se uma solução aproximada na forma:

$$x_0(t) = A_{sen}(\Omega t) \quad (3.48)$$

Aplicando, a partir daí o método iterativo de solução de equações diferenciais, ou seja, substituindo a candidata à solução, (3.48), e sua derivada na equação de movimento, no nosso caso o oscilador simétrico de *Duffing*, (3.8). A substituição produz:



$$-m\Omega^2 A \sin(\Omega t) + c\Omega A \cos(\Omega t) + k_1 A \sin(\Omega t) + k_3 A^3 \sin^3(\Omega t) = U \sin(\Omega t) \quad (3.49)$$

Usando relações trigonométricas fundamentais tem-se:

$$\begin{aligned} & -m\Omega^2 A \sin(\Omega t) + c\Omega A \sin(\Omega t) + k_1 A \sin(\Omega t) + k_3 A^3 \left\{ \frac{3}{4} \sin(\Omega t) - \frac{1}{4} \sin(3\Omega t) \right\} \\ & = U \sin(\Omega t) \cos(\phi) - U \cos(\Omega t) \sin(\phi) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Equacionando os coeficientes  $\sin(\omega t)$  e  $\cos(\omega t)$  teremos as equações:

$$(-m\Omega^2 A + k_1 A + \frac{3}{4} k_3 A^3) = U \cos(\phi) \quad (3.51)$$

$$c\Omega A = -U \sin(\phi) \quad (3.52)$$

Desta forma, obtém-se:

$$U^2 = A^2 \left[ \left\{ -m\Omega^2 + k_1 + \frac{3}{4} k_3 A^2 \right\}^2 + c^2 \Omega^2 \right] \quad (3.53)$$

Que nos fornece a equação de ganho ou módulo do sistema:

$$\left| \frac{A}{U} \right| = \frac{1}{\left[ \left\{ -m\Omega^2 + k_1 + \frac{3}{4} k_3 A^2 \right\}^2 + c^2 \Omega^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.54)$$

A fase é obtida a partir da relação entre as equações (3.51) e (3.52):

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{-c\Omega}{-m\Omega^2 + k_1 + \frac{3}{4} k_3 A^2} \right) \quad (3.55)$$

As equações (3.54) e (3.55) podem ser combinadas em uma forma complexa:

$$\Lambda(\Omega) = \frac{1}{k_1 + \frac{3}{4} k_3 A^2 - m\Omega^2 + ic\Omega} \quad (3.56)$$

Pode-se considerar como a resposta em frequência de um sistema linearizado:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_{eq}x = U \sin(\Omega t) \quad (3.57)$$

Sendo a rigidez equivalente dependente da amplitude:

$$k_{eq} = k_1 + \frac{3}{4} k_3 A^2 \quad (3.58)$$

Desta forma, em um determinado nível de excitação, a resposta em frequência terá uma frequência natural:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 + \frac{3}{4}k_3A^2}{m}} \quad (3.59)$$

A frequência natural, **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, depende diretamente da amplitude de saída  $A$  e, indiretamente, de  $U$ , amplitude de entrada. Sendo assim, se  $K_3 > 0$  a frequência natural aumenta com o aumento de  $U$ , e a não linearidade é chamada dura, enquanto que, se  $K_3 < 0$  o sistema é dito macio e a frequência natural diminui de acordo com o aumento de  $U$  (WORDEN e TOMLINSON, 2001).

Observa-se na Figura 3.10 que para pequenos valores de excitação uma única resposta pode ser notada para qualquer  $\Omega$ , isto devido à única raiz real da equação (3.53). Enquanto  $A$  cresce, a resposta se torna mais distorcida se afastando da forma linear, o que continua até que  $A$  atinja um valor crítico, a partir deste ponto para um conjunto de valores de  $\Omega$  a resposta apresenta três soluções reais.

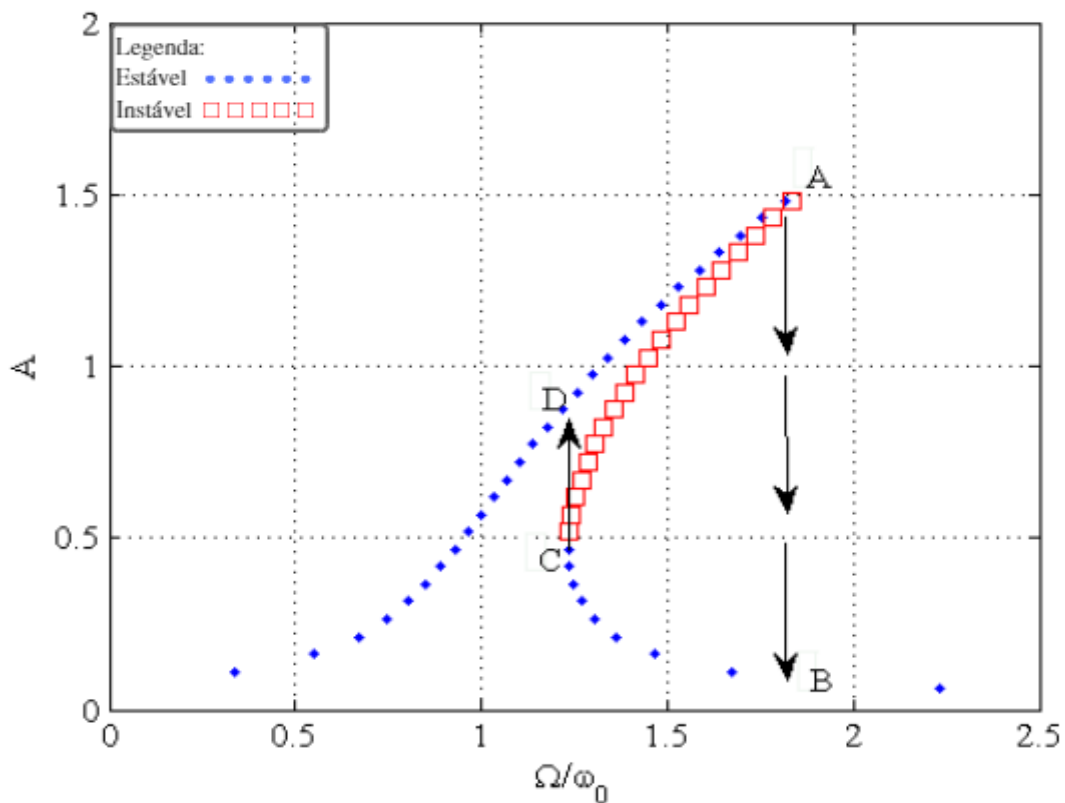


Figura 3.10 - Gráfico da resposta em frequência obtido a partir da equação (3.53): (AB) *Jump-Down*; (CD) *Jump-Up*.

Fonte: O autor (2018)

Isto pode ser visto como um exemplo de bifurcação para o parâmetro  $A$ . Estas duas soluções adicionais persistem até um determinado valor de  $\Omega$ , que ao ser alcançado desaparecem. A

região de instabilidade, em forma de quadrados, na Figura 3.10, pode ser encontrada numericamente usando a técnica do balanço harmônico, por meio das frequências e amplitudes de *jump-up*, de C para D, e *jump-down*, de A para B.

A Tabela 3.1 mostra as equações usadas para determinar, analiticamente, as frequências de *jump-up* e *jump-down* e as correspondentes amplitudes de vibração tanto para sistemas macios quanto sistemas duros, ambos com amortecimento viscoso linear (BRENNAN, KOVACIC, *et al.*, 2008).

	Sistema macio	Sistema duro
<b>Frequência de Jump-up</b>	$\Omega_{up} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{4}{3}}  \alpha ^{\frac{1}{3}}$	$\Omega_{up} = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{4}{3}}  \alpha ^{\frac{1}{3}}$
<b>Amplitude da frequência de jump-up</b>		$A_{up} = \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{ \alpha ^{\frac{1}{3}}}$
<b>Frequência de Jump-down</b>		$\Omega_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \left( 1 + \frac{3\alpha}{4\xi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$
<b>Amplitude máxima de jump-down</b>		$A_d = \left( \frac{2}{3\alpha} \left( \left( 1 + \frac{3\alpha}{4\xi^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}}$

Tabela 3.1 - Equações de frequência e amplitude de *jump-up* e *jump-down*

Fonte: Adaptado de Brennan, Kovacic, *et al* (2008)

As equações foram calculadas usando os métodos da perturbação, esta técnica é bastante precisa em prever a frequência de *jump-up* porque mesmo quando houver uma forte não linearidade a frequência de salto será próxima à frequência natural do sistema linear não amortecido. Entretanto, para frequência de *jump-down* a técnica apresenta resultados imprecisos (BRENNAN, KOVACIC, *et al.*, 2008).

Apesar das múltiplas soluções encontradas analiticamente, experimentalmente apenas uma solução pode acontecer por vez. Considerando uma varredura ascendente da frequência, uma única resposta existe até o ponto D da Figura 3.10, a partir deste ponto a resposta permanece

neste ramo da solução, essencialmente por continuidade, até alcançarmos o ponto  $A$ , onde o ramo deixa de existir e a única solução possível ocorre a partir do ponto  $B$ , este salto na solução ocorre devido à descontinuidade do sistema.

Em uma varredura descendente encontramos um processo similar. Para altas frequências uma única solução existe até o ponto  $B$ , a partir daí, apesar das múltiplas respostas, a solução permanece neste ramo por continuidade, o que persiste até o ponto  $C$ , onde o ramo deixa de existir e ocorre um salto para o ponto  $D$  que passa a ser a única solução possível.

## 4 FUNÇÃO DESCRITIVA APLICADA A UM OSCILADOR.

### 4.1 Descrição do modelo

A fim de aplicar as técnicas geométricas discutidas no Capítulo 3, serão usados os trabalhos de Holmes (1979) e Moon e Holmes (1979), em suas obras, ambos utilizam o ponto de vista qualitativo para analisar a equação diferencial de segunda ordem conhecido por equação de Duffing. Em particular, estudam a natureza global da atração do movimento como resultado de bifurcações.

Moon e Holmes (1979) aplicam a representação de modo único de Garlekin para encontrar o modelo matemático que descreve o movimento da haste do oscilador magneto-elástico. Tal representação não causa nenhuma perda de informação qualitativa. Pode-se ver a aplicação desta técnica, bem como a equação resultante, (2.17), equivalente à equação de Duffing, (2.1), na subseção 2.5 deste trabalho.

Em seu trabalho Holmes (1979) demonstra que uma equação equivalente a de Duffing é globalmente estável, isto é, em tempo suficiente todas as soluções possíveis entram e permanecem em uma região limitada do espaço de estados  $(x, \dot{x})$ . Desta forma, a equação sempre terá pelo menos uma região atratora.

Apesar de apresentarem resultados experimentais e computacionais qualitativamente semelhantes, deve-se notar que os parâmetros não dimensionais usados nos dois trabalhos são diferentes. Enquanto Holmes (1979) usa os parâmetros:  $\gamma = 0.045, F = 0.28, \Omega = 0.84$ ; Moon e Holmes (1979) utilizam como parâmetros os valores:  $\gamma = 0.0036, F = 0.035, \Omega = 0.89$ . Aqui, os parâmetros encontrados no artigo de Moon e Holmes (1979) serão usados. Então, a equação (2.17) será representada como um sistema autônomo com  $x_1 = x$ ;  $x_2 = \dot{x}$  e  $t = \theta$ .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_1^3 - 0.0036x_2 + 0.035 \cos(0.89\theta) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

### 4.1 Análise do Plano de Fase

Verifica-se o comportamento das trajetórias no plano de fase linearizando o sistema em torno dos pontos de equilíbrio. Neste caso, onde  $k_1$  é positivo e  $k_3$  negativo o ponto trivial será

ponto de sela, enquanto a estabilidade dos pontos fixos não triviais depende dos valores de  $k_1$  e do coeficiente de amortecimento. Como o coeficiente de amortecimento é positivo e menor que o termo de rigidez linear, existe autovalores complexos conjugados com parte real negativa. Desta maneira, os pontos de equilíbrio não triviais são focos estáveis na forma da Figura 4.1 (KOVACIC e BRENNAN, 2011).

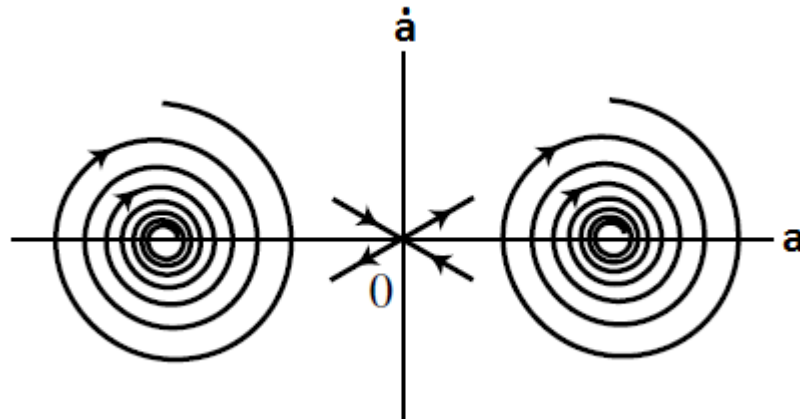


Figura 4.1 - Plano de fase para o caso de  $0 < 0.0036 < k_1$ .

Fonte: Adaptado de Kovacic e Brennan (2011)

Para iniciar a análise do plano de fase do modelo 4.1 observando a seção 3.1.2 que inicia o estudo usando o método direto de *Liapunov*. Como dito a estabilidade do modelo está associada à energia dissipada, para examinar tal condição usamos a função de energia potencial (3.14).

$$V(x) = \frac{(-0.5)}{2}x^2 + \frac{(0.5)}{4}x^4 \quad (4.2)$$

Determinam-se, então, os pontos de equilíbrio do sistema, por meio da equação (3.17):

$$x_0 = 0; x_{1,2} = \pm 1 \quad (4.3)$$

Logo, pode-se encontrar o gráfico da função de *Liapunov*, Figura 4.2:

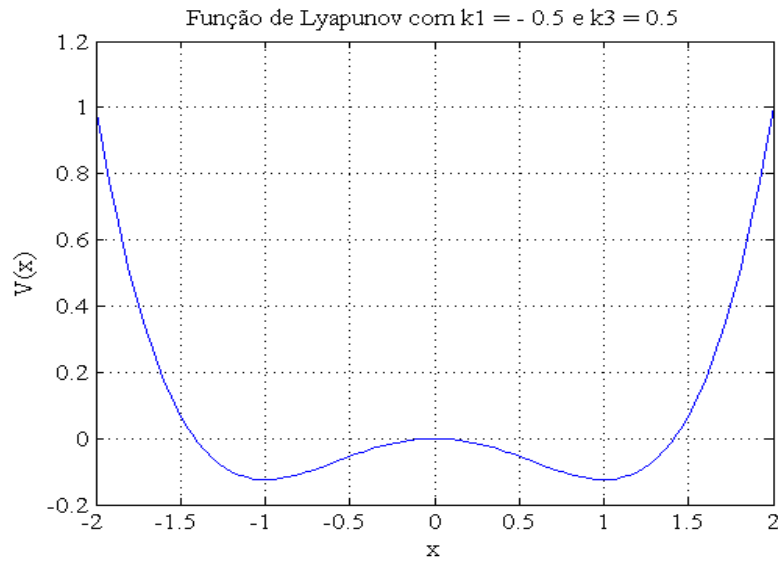


Figura 4.2 - Poço de potencial duplo do modelo,  $k_1 = -0.5$  e  $k_3 = 0.5$ .

Fonte: O autor (2018)

A Figura 4.3 comprova a relação entre a função de *Liapunov* e as trajetórias no espaço de estados. Vê-se que os mínimos de energia potencial estão localizados nos mesmos lugares das bacias de atração que englobam os pontos críticos fora da origem  $(x, \dot{x}) = (\pm 1, 0)$ . Considerando o sistema do oscilador magneto-elástico, ao aplicar uma força periódica moderada, a haste se movimentava entre as bacias de atração de maneira aparentemente caótica. A posição dos ímãs interfere na quantidade dos pontos críticos, o que resultaria em uma mudança qualitativa da estabilidade destes (MOON e HOLMES, 1979) sinal claro da presença de bifurcações no sistema.

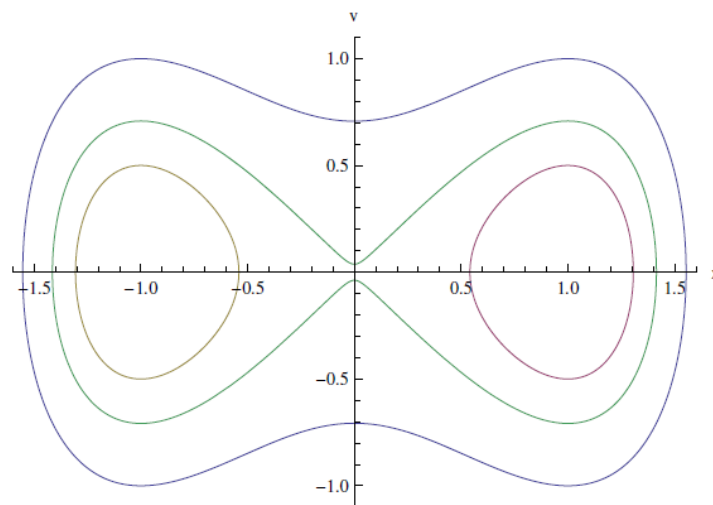


Figura 4.3 - Espaço de fase do modelo com diferentes condições iniciais.

Fonte: O autor (2018)

## 4.2 Bifurcação

Como visto na subseção 3.1.3 a alteração qualitativa causada pela variação de parâmetros, neste caso quanto à localização e estabilidade dos pontos fixos, é creditada a um fenômeno chamado bifurcação. Na Figura 4.4 nota-se que enquanto o parâmetro  $k_1$  aumenta, subitamente, aparecem diferentes soluções qualitativas. Na imagem observamos o número de soluções dobrarem até atingir o caos. O que demonstra uma característica do oscilador de Duffing, a tendência a um comportamento caótico. Mais a frente será analisada a existência de bifurcações no domínio da frequência.

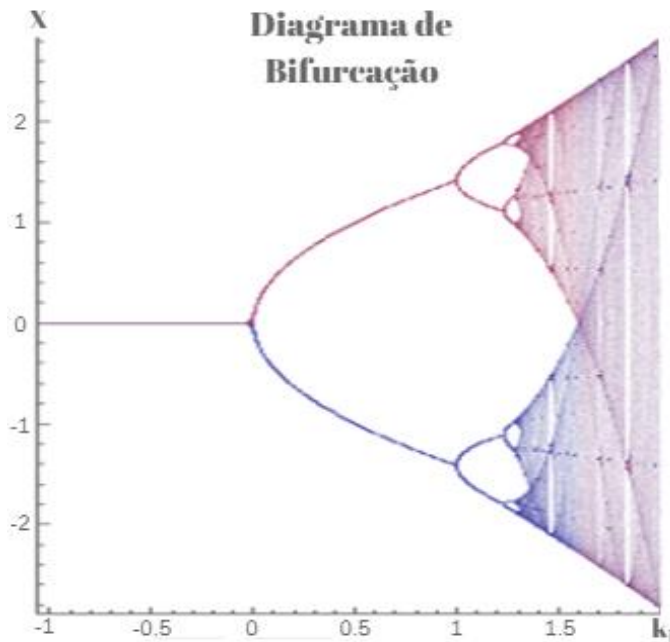


Figura 4.4 - Diagrama de Bifurcação.

Fonte: O autor (2018)

Aqui, analisa-se o caso do sistema livre e em equilíbrio estático, desta forma, velocidade e aceleração são nulas, bem como não existe atuação de força externa,  $\dot{x} = \ddot{x} = F = 0$ . Entretanto, o resultado é similar ao apresentado no trabalho de Moon e Holmes (1979), onde os autores observam o fenômeno da bifurcação. Em seu trabalho os autores demonstram que o movimento de haste se concentra em uma ou outra bacia de atração, dependendo dos parâmetros iniciais.

Aumentando a energia do sistema às bacias de atração são esticadas e, finalmente, se intersectam. Desta maneira, a solução do sistema vaga erráticamente entre as bacias antes de



ser atraída para uma delas. As duas bacias correspondem aos ramos da bifurcação e ocorrem simultaneamente. Ao continuar aumentando a energia inicial do sistema, bifurcações continuam a ocorrer, conseqüentemente, o movimento da haste não é mais atraído a uma órbita periódica, mas tende a vagar caoticamente entre os pontos críticos, indicando a ocorrência de uma bifurcação global, alterando a topologia do sistema. O que pode ser visto na Figura 4.4 nos altos valores de  $k_1$  quando múltiplas soluções coexistem e a haste se movimenta entre elas.

### 4.3 Função Descritiva

O método de aplicação da função descritiva, discutido na subseção 3.2, será aqui empregado tanto para entender fenômenos periódicos como o ciclo limite, quanto para caracterizar o comportamento do modelo estudado. A abordagem a ser utilizada será a da função descritiva para entrada senoidal. Seguindo o método da seção deve-se representar o modelo (4.1) na forma de diagrama de bloco, separando a não linearidade do sistema e realocando-a como uma realimentação, como na Figura 3.6. Antes, define-se a função descritiva que representa a não linearidade.

#### 4.3.1 Definindo a função descritiva

Por definição a função descritiva substitui a não linearidade do sistema por um ganho aproximado, aplicando o conceito de função de transferência a não linearidades. Seguindo o método da seção 3.2.2 deve-se considerar a entrada do elemento não linear,  $N(A, \Omega)$ , essencialmente senoidal na forma  $y \cong A \sin(\Omega t)$ . Desta maneira, define-se  $N(A)$  de acordo a equação (3.27). Aplicando as relações algébricas de (3.29) à (3.31), determina-se a função descritiva (3.32):

$$N(A, \Omega) = 3A^2/8 \quad (4.4)$$

#### 4.3.2 Aplicando a transformada de Laplace

Antes de executar o método de análise de ciclo limites, usando, para isto, a noção da função descritiva, é necessário encontrar a função de transferência do elemento linear por meio da transformada de Laplace:

$$l(t) = \ddot{x} + 0,0036\dot{x} - 0,5x \quad (4.5)$$

Após a aplicação da transformada:

$$L(s) = \frac{1}{s^2 + 0,0036s - 0,5} \quad (4.6)$$

Substituindo o operador de Laplace  $s$  por  $j\Omega$ , determina-se a função de transferência do elemento linear no domínio da frequência. Seguindo a lógica da equação (3.40), pode-se separar em parte real, equação (3.41); e, imaginária, (3.42), da função de transferência. Por meio da relação (3.43) observa-se que a parte imaginária da equação deve ser nula, enquanto a parte real será usada para estudar a existência e as características de ciclo limites a partir da equação (3.46).

Assim, pode-se representar o sistema (4.1) na forma de um diagrama de blocos como o da Figura 4.5 com a função descritiva:

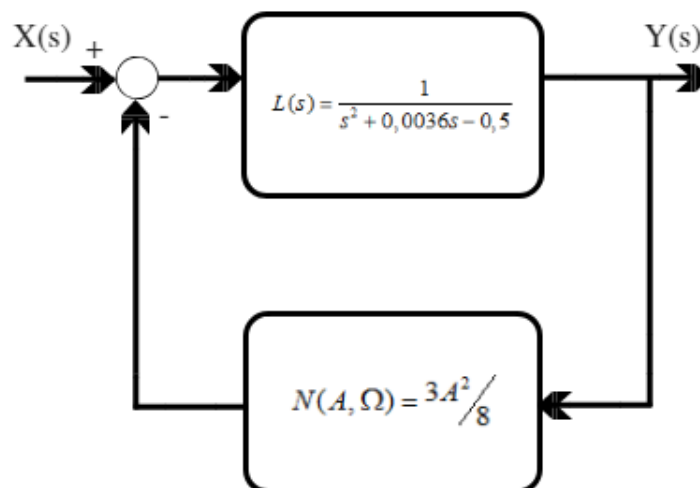


Figura 4.5 – Diagrama de blocos da função descritiva.

Fonte: O autor (2018)

### 4.3.3 Caracterizando ciclo limite

A fim de determinar a existência de ciclo limites neste sistema, aplica-se a equação (3.46). Como definido na subseção 3.1.4 ciclo limites são orbitas regulares periódicas que atraem ou repelem todas as trajetórias do sistema. Fazendo uso da técnica da função descritiva, pode-se caracterizar os ciclo limites por meio do método do diagrama de *Nyquist*, que, como já mencionado, não pode ser diretamente aplicado em sistemas não lineares.

O gráfico de  $L(j\Omega)$  intercepta o lugar geométrico de  $-1/N(A, \Omega)$  apenas na parte negativa do eixo real e, sendo o gráfico do elemento não linear, no plano complexo, correspondente

apenas ao eixo real, pode-se afirmar que os gráficos apenas se tocam se  $k_1$  for menor que zero. Desta maneira, pode-se encontrar a amplitude e frequência do ciclo limite e estudar seu comportamento tanto de modo analítico quanto geométrico.

Fazendo:  $\Omega = \infty \rightarrow G(j\Omega \rightarrow \infty) = 0$ ; enquanto que sendo  $\Omega = 0 \rightarrow G(j\Omega \rightarrow 0) = 1/\omega_n^2$ . Sendo  $k_1 = \omega_n^2$ . Desta forma, podemos encontrar a amplitude aproximada do ciclo limite.

$$-1/N(A, \Omega) = G(j\Omega = 0) \rightarrow -8/3A^2 = 1/k_1 \rightarrow A = \sqrt{\frac{-8k_1}{3}} \quad (4.7)$$

Sendo  $k_1 = -0.5$ , temos que a amplitude aproximada do ciclo limite:  $A = 1.155$ . Construindo os modelos matemáticos com o auxílio do software *Matlab*, determina-se o valor aproximado da amplitude, por meio de uma análise geométrica, observando as características do ponto de interseção das curvas. A Figura 4.6 mostra o ponto de interseção com amplitude aproximada  $A = 2$ , e frequência aproximada de  $\Omega = 0.0013$ .

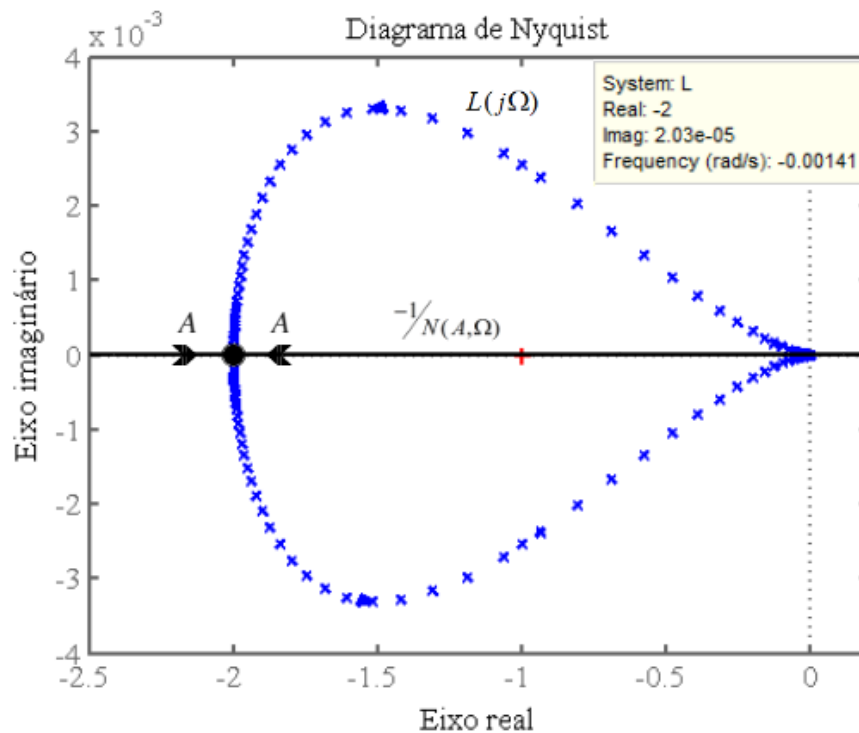


Figura 4.6 - Diagrama de Nyquist para o sistema da Figura 4.5.

Fonte: O autor (2018)

A partir da Figura 4.6, pode-se, também, atestar outra característica do ciclo limite, sua estabilidade. Fazendo:  $A = \infty \rightarrow -1/N(A, \Omega) = 0$ ; enquanto que sendo  $A = 0 \rightarrow -1/N(A, \Omega) = \infty$ . As setas no gráfico de  $-1/N(A, \Omega)$  mostram a tendência de crescimento da amplitude, indicando que o ciclo limite é estável.

#### 4.3.4 Resposta em frequência

A resposta em frequência é o estudo da relação entre as amplitudes de entrada e saída, e da fase em função da frequência. Em sistemas não lineares, como o nosso, a relação complexa entre os espectros de saída e de entrada produz uma componente de resposta com frequência diferente da inicial. A função de resposta em frequência pode ser encontrada na subseção 3.2.4, equação (3.47).

A Figura 4.7, construída a partir da equação (3.53), mostra a resposta em frequência do sistema (4.1). Nota-se que, assim como a equação, o gráfico, a partir de uma frequência crítica, apresenta três soluções possíveis. Sendo assim, a resposta do sistema tende a uma das três possíveis soluções, dependendo das condições iniciais do problema.

A análise de estabilidade revela que uma das soluções reais é instável, (WORDEN e TOMLINSON, 2001) e apenas duas soluções irão ocorrer na prática (WILMSHURST, ELLIOTT e GHANDCHI-TEHRANI, 2015). A equação (3.59) mostra a dependência direta da frequência natural do sistema quanto à amplitude de excitação. O aumento da amplitude resulta no aumento do pico de ressonância, ampliando, também, a região de instabilidade, representada na Figura 4.7 como quadrados.

Observando a Figura 4.7 verifica-se que o comportamento instável está limitado a apenas uma pequena faixa de amplitude  $F = (0.7, 2.5)$ , o que está de acordo com a faixa encontrada por Holmes (1979),  $F = (1.08, 2.45)$ . Para  $F = 0$  o plano de fase da Figura 4.1 se aplica, e o sistema apresenta um ponto de sela e dois focos estáveis. Para valores pequenos de  $F$  os focos passam a ser orbitas fechadas em torno dos pontos fixos não triviais, o que foi estabelecido estudando a Figura 4.6.

Segundo Holmes (1979), não se sabe como a instabilidade afeta as órbitas fechadas estáveis próximas aos pontos de equilíbrio, entretanto a atração global do sistema é mantida. Desta forma, nenhuma solução foge dos pontos fixos quando  $t \rightarrow \infty$ . Finalmente, para valores grandes de  $F$  ocorrerão movimentos forçados que levarão a orbitas em torno dos três pontos fixos.

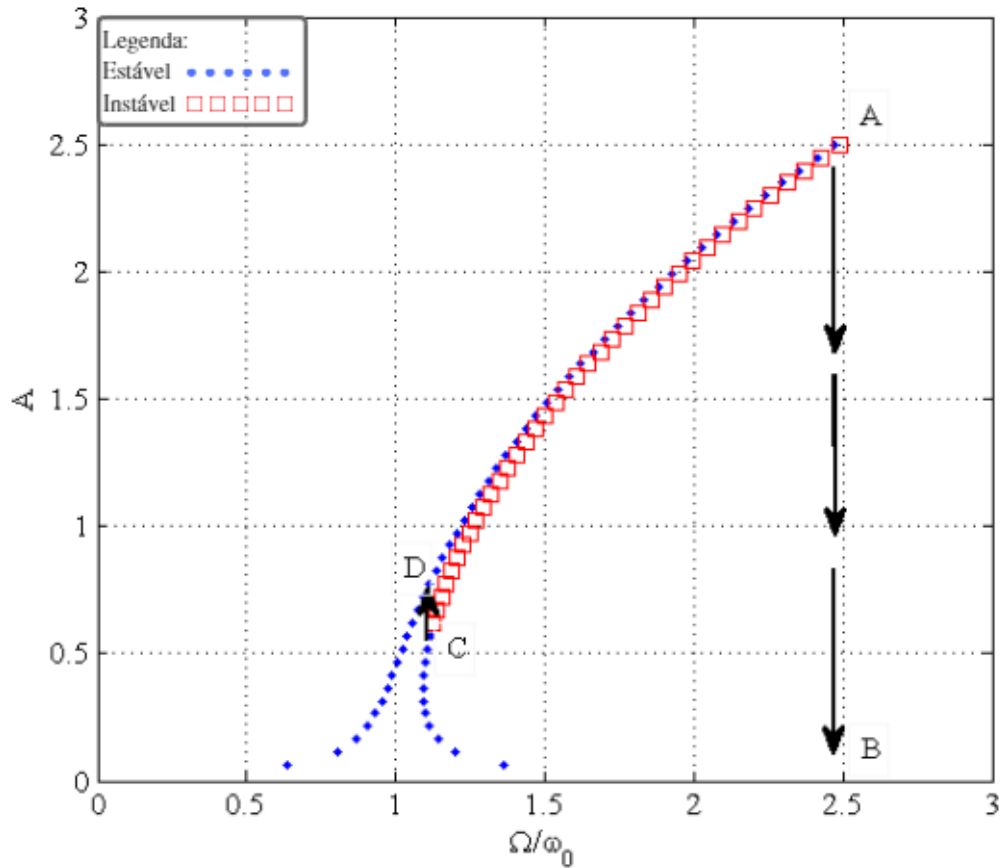


Figura 4.7 - Gráfico da resposta em frequência obtido a partir da equação (4.1): (AB) *Jump-Down*; (CD) *Jump-Up*.

Fonte: O autor (2018)

Tal região de instabilidade pode ser determinada de maneira analítica e geométrica. As equações da Tabela 3.1 podem ser usadas para calcular as frequências de *jump-up*, de C para D, e *jump-down*, A para B. Estes eventos, onde a resposta salta de um ramo da solução para outro, são resultado do fenômeno da bifurcação.

Bifurcações no domínio da frequência são tipicamente indicadas na existência de várias soluções, em estado estacionário, que satisfazem a equação do balanço harmônico de primeira ordem (WILMSHURST, ELLIOTT e GHANDCHI-TEHRANI, 2015). O que resulta no fenômeno de Jump e está diretamente relacionado com sub-harmônicas e caos. Diminuindo a previsibilidade do sinal de saída e podendo resultar em instabilidade em sistemas mecânicos.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou alguns princípios básicos sobre dinâmica de sistemas. Por meio de uma interpretação qualitativa foi possível investigar uma variedade de comportamentos típicos de problemas não lineares. Aplicando técnicas de análise geométrica como a função descritiva e o plano de fase, estudou-se um sistema físico analisando os fenômenos associados às características do movimento que foi descrito matematicamente pelo modelo desenvolvido pelo engenheiro alemão Georg Duffing.

Para empregar alguns métodos de análise tipicamente usados em sistemas lineares como a técnica de *Nyquist* e a função da resposta em frequência, aplicou-se a função descritiva na equação de Duffing. Assim, foram construídos modelos matemáticos e, a partir da simulação destes, foi possível examinar a natureza do sistema fugindo das complicações impostas pelos métodos analíticos. As características qualitativas obtidas pelos métodos geométricos e por computação condizem com os trabalhos teóricos usados como referências. O comportamento do oscilador magneto-elástico observado apresenta sensibilidade crítica quanto à amplitude  $F$  e frequência  $\Omega$  da força externa aplicada, bem como, quanto a variação do parâmetro linear da força restauradora.

Enquanto a amplitude  $F$  muda, o seguinte fenômeno ocorre: Quando  $F = 0$  o sistema apresenta um ponto de sela trivial e dois focos estáveis atuando como bacias de atração. Desta forma, a solução possível tende a um dos dois pontos fixos estáveis. Assim sendo, observa-se experimentalmente, segundo (MOON e HOLMES, 1979), que apenas uma solução ocorre. O ponto de sela persiste inalterado para qualquer valor de  $F$ , enquanto o comportamento das bacias de atração muda de acordo com as alterações de  $F$ .

Para pequenos valores de  $F$ ,  $F < 1.1$ , ciclo limites estáveis aparecem em torno dos pontos fixos não triviais que se sustentam até que  $F$  atinge valores medianos,  $1.1 < F < 2.5$ , quando ocorrerem bifurcações e surge um comportamento aparentemente instável, dentro deste limite o movimento da haste oscila entre as duas bacias de atração antes de tender a uma delas, podendo ocorrer mais de uma solução. Para determinados valores de  $F$  nesta região de instabilidade o oscilador apresentará um movimento aparentemente caótico. Assim como no trabalho de Moon e Holmes (1979), observou-se que quando  $F > 2.5$  o sistema apresenta um comportamento em torno dos três pontos de equilíbrio.

Assim, sem que fosse necessária a construção do protótipo, foi possível observar o comportamento do oscilador com uso da técnica da função descritiva. Observaram-se as características qualitativas da dinâmica do sistema, apresentando, para isso, uma base teórica matemática do desenvolvimento da técnica, bem como, a forma como o oscilador foi modelado, a partir da aproximação de *Galerkin* com um único grau de liberdade, representação esta, que produziu resultados sensatos.

#### 5.1 Sugestões para trabalhos futuros

Como continuação deste trabalho, pode-se realizar o desenvolvimento de um protótipo do oscilador magneto-elástico, para assim, desempenhar experimentos práticos, a fim de, observar o comportamento real do sistema.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ATHERTON, D. P. ***Nonlinear Control Engineering***. 1<sup>a</sup>. ed. New York: Van Nostrand Reinhold, 1982. 470 p.

BRENNAN, M. J. et al. **On the Jump-up and Jump-down Frequencies**. *Journal of Sound and Vibration*, 318, Junho 2008. 1250-1261.

CHEN, G.; DONG, X. **On Feedback Control of Chaotic Continuous-Time Systems**. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, v. 40, n. 09, p. 591-601, 1993.

CVETICANIN, L. **Ninety Yeras of Duffing's Equation**. *Theoretical and Applied Mechanics*, Belgrador, v. 40, n. Special Issue, p. 49-63, 2012.

DI BERNARDO, M. **A Purely Adaptive Controller to Synchronize and Control Chaotic Systems**. *Physics Letters A*, v. 214, n. 3-4, p. 139-144, 1996.

FELICIO, L. C. **Modelagem da Dinâmica de Sistemas e o Estudo da Resposta**. 2<sup>a</sup>. ed. São Carlos: RiMa, 2010. ISBN 978-85-7656-169-9.

GELB, A.; VANDER VELDE, W. E. **Multiple-Input Describing Function and Nonlinear System Design**. 1<sup>a</sup>. ed. Nova Yorke: McGraw-Hill Book, 1968.

HE, J.-H. **Homotopy Perturbation Technique**. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 178, n. 3, p. 257-262, 1999.

HOLMES, P. **A Nonlinear Oscillator with a Strange Attractor**. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Londres, 29, n. 1394, 23 Outubro 1979. 419-448.

JIANG, Z. P. **Advanced Feedback Control of the Chaotic Duffing Equation**. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, v. 49, n. 02, p. 244-249, 2002.

JOHNSON, E. C. **Sinusoidal Analysis of Feedback-Control Systems Containing Nonlinear Elements**. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry*, v. 71, n. 3, p. 169-181, Julho 1952.



- KOVACIC, I.; BRENNAN, M. J. **Background: On Georg Duffing and the Duffing Equation.** In: KAVACIC, I.; BRENNAN, M. J. *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour.* [S.l.]: John Wiley and Sons, 2011. p. 1-23.
- LAPA, J. A. M. *Análise Dinâmica Linear e Não-Linear de Estruturas.* Dissertação (Dissertação em Engenharia Estrutural) - UP. Porto. 1987.
- LIFSHITZ, R.; CROSS, M. C. **Nonlinear Dynamics of Nanomechanical and Micromechanical Resonators.** In: SCHUSTER, H. G. *Reviews of Nonlinear Dynamics and Complexity.* [S.l.]: Wiley, 2009. p. 1-52.
- MEES, A. I.; BERGEN, A. R. **Describing Functions Revisited.** *IEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, v. 20, n. 4, p. 473-478, 1975.
- MOHAN, S. R. *Frequency Response of Highly Nonlinear Systems.* Oklahoma State University. [S.l.]. 1981.
- MOON, F. C.; HOLMES, P. J. **A Magnetoelastic Strange Attractor.** *Journal of Sound and Vibration*, 65, n. 2, 1979. 275-296.
- OLYMPIO, R. B. *Modelagem e Validação Experimental de um Gerador Piezelétrico de Energia em Miniatura.* São Carlos. 2014.
- OTT, E.; GREBOGI, C.; YORKE, J. A. **Controlling Chaos.** *Physical Review Letters*, v. 64, n. 11, p. 1196, 1990.
- PURCINA, A. B. *Análise de Estabilidade em Sistemas Mecânicos Não Lineares com Vistas a Atenuação de Vibrações.* Universidade Federal de Goiás. Catalão. 2016.
- RAZZACK, M. A. **An Analytical Approximate Technique for Solving Cubic-Quintic Duffing Oscillator.** *Alexandria Engineering Journal*, v. 55, n. 3, p. 2959-2965, 2016.
- REIS, C. A. et al. **Análise das Deflexões Grandes de uma Viga com Rigidez Não Linear Utilizando a Linearização Exata a Realimentação.** *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, São Carlos, v. 3, n. 1, 2015.
- ROSENBERG, R. M. **Normal Modes of Nonlinear Dual-Mode Systems.** *Journal of Applied Mechanics*, v. 27, n. 2, p. 263-268, 1960.
- SLOTINE, J. J.; LI, W. *Applied Nonlinear Control.* 1ª. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1991.

STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Massachusetts: Perseus Books Publishing, 1994.

TAYLOR, J. H. **Describing Functions**. *Electrical Engineering Encyclopedia*, New York, 1999.

VAKAKIS, A. F. et al. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. 1<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1996.

WILMSHURST, L. I.; ELLIOTT, S. J.; GHANDCHI-TEHRANI, M. **Bifurcation Control of a Duffing Oscillator Using Pole Placement**. *Journal of Vibration and Control*, 21, n. 14, 2015. 2838-2851.

WORDEN, K.; TOMLINSON, G. R. *Nonlinearity in Structural Dynamics: Detection, Identification and Modelling*. 1<sup>a</sup>. ed. Londres: Institute of Physics Publishing, 2001.

ZAK, M.; ZBILUT, J. P.; MEYERS, R. E. *From Instability to Intelligence: Complexity and Predictability in Nonlinear Dynamics*. 1<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: Springer, 1997.