Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Departamento de Estatística
Bacharelado em Estatística

Modelo Geral de Degradação: Aplicação do Método Aproximado a Dados de Laser

Pedro Henrique Romanhol Pessoa

Ouro Preto-MG
Fevereiro de 2024

Pedro Henrique Romanhol Pessoa

Modelo Geral de Degradação: Aplicação do Método Aproximado a Dados de Laser

Monografia de Graduação apresentada ao Departamento de Estatística do Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para a obtenção do grau de bacharel em Estatística.

Orientador(a)

Prof. Dr. Rivert Paulo Braga Oliveira

Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP
Departamento de Estatística – DEEST

Ouro Preto-MG

Fevereiro de 2024

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

P475m Pessoa, Pedro Henrique Romanhol.
Modelo geral de degradação [manuscrito]: aplicação do método aproximado a dados de laser. / Pedro Henrique Romanhol Pessoa. - 2024.
47 f.: il.: , gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Rívert Paulo Braga Oliveira.
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Graduação em Estatística .

1. Estatística. 2. Métodos de aproximação. 3. Monte Carlo, Método de. 4. Lasers. I. Oliveira, Rívert Paulo Braga. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 311

Bibliotecário(a) Responsável: Paulo Vitor Oliveira - CRB6/2551

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E BIOLOGICAS
COLEGIADO DO CURSO DE ESTATISTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Pedro Henrique Romanhol Pessoa

Modelo Geral de Degradação: Aplicação do Método Aproximado a Dados de Laser

Monografia apresentada ao Curso de Estatística da Universidade Federal
de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Estatística.

Aprovada em 20 de fevereiro de 2024

Membros da banca

Dr. Rivert Paulo Braga Oliveira - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)
Dra. Carolina Silva Pena - Membro (Universidade Federal de Ouro Preto)
Dr. Eduardo Bearzoti - Membro (Universidade Federal de Ouro Preto)

Prof. Dr. Rivert Paulo Braga Oliveira, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 20/02/2024

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35402-163
Telefone: (31)3559-1312 - www.ufop.br

Este trabalho é todo dedicado aos meus pais, pois é graças ao seus esforços que hoje posso concluir o meu curso, à minha irmã, Maria Eduarda e à minha namorada Marina.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Alan e Silvana; a minha irmã Maria Eduarda; a minha namorada Marina; aos meus amigos e familiares.

Agradeço a todos os meus professores do IFMG pelo conhecimento transmitido, em especial ao professor Bruno, que me incentivou a conhecer o curso de estatística.

Ao meu orientador Prof. Dr. Rivert Paulo Braga Oliveira, pela orientação e dedicação na elaboração desta monografia.

Agradeço aos meus professores de graduação em Estatística pelo conhecimento transmitido.

"Sem dados você é apenas mais uma pessoa com uma opinião."

William Edwards Deming

Modelo Geral de Degradação: Aplicação do Método Aproximado a Dados de Laser

Autor: Pedro Henrique Romanhol Pessoa

Orientador(a): Prof. Dr. Rivert Paulo Braga Oliveira

Resumo

Neste trabalho uma base de dados de degradação laser serviu de ponto de partida para ensejar a apresentação do Modelo Geral de Degradação e dois de seus métodos de estimação. Também importantes para a inferência sobre a distribuição dos Tempos de Falha, os modelos probabilísticos Weibull e Lognormal foram apresentados com as respectivas quantidades de interesse na área de confiabilidade que caracterizam tais modelos. Ademais, apresentaram-se os passos da simulação Monte Carlo para construção de intervalos de confiança. A metodologia foi então aplicada a dados de laser para ilustração do passo a passo de análise de dados de degradação com a utilização do método aproximado. As quantidades de interesse estimadas permitiram extrair informações importantes para o contexto da situação prática motivadora deste texto.

Palavras-chave: Modelo Geral de Degradação, Método Aproximado

General Path Models for Degradation Data: an Application of Approximated and Numerical Methods for Laser Data

Author: Pedro Henrique Romanhol Pessoa

Advisor: Prof. Dr. Rivert Paulo Braga Oliveira

Abstract

In this work, the laser degradation database served as a starting point to present the General Degradation Model and two of its estimation methods. Also important for inferring the distribution of Failure Times, the Weibull and Lognormal probabilistic models were presented with the respective quantities of interest in the area of reliability that characterize such models. Furthermore, the Monte Carlo simulation steps for constructing Confidence Intervals were presented. The methodology was then applied to laser data to illustrate step-by-step degradation data analysis using the approximated method. The estimated quantities of interest made it possible to extract important information for the context of the practical situation that motivated this text.

Keywords: General Path Models, Approximated Method,

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

UFOP – Universidade Federal de Ouro Preto

DEEST – Departamento de Estatística

N – distribuição Normal

fda – função distribuição acumulada

fdp – função densidade de probabilidade

Lista de símbolos

Y_{ij} (variável aleatória da degradação da i-ésima unidade sob teste, no j-ésimo tempo)

t_{ij} (j-ésimo tempo de medição do i-ésimo item sob teste com $i = 1, 2, \ldots, n$ unidades sob teste,$j = 1, 2, \ldots, m_i$ tempos de medição da i-ésima unidade)

n (número de itens sob teste)

m_i (número de medições do i-ésimo item sob teste)

$\boldsymbol{\beta_i}$ (vetor de parâmetros da equação $D(t_{ij}, \boldsymbol{\beta_i})$)

$D(t_{ij}, \boldsymbol{\beta_i})$ (forma funcional determinística que modela os perfis de degradação de cada unidade amostral i)

ε_{ij} (erro do Modelo Geral de Degradação, da i-ésima unidade sob teste, no j-ésimo tempo)

σ_ε^2 (variância dos erros ε_{ij})

D_f (limiar de degradação definidor de falha)

T (variável aleatória do tempo até a falha)

F (função distribuição acumulada)

$\boldsymbol{\beta}$ (matriz de parâmetros da equação $D(t, \boldsymbol{\beta})$)

$D(t, \boldsymbol{\beta})$ (equação da forma funcional determinística que modela conjuntamente os n perfis de degradação)

$\boldsymbol{\theta}$ (vetor de parâmetros de uma distribuição de probabilidade genérica. Neste texto pode se referir tanto a $\boldsymbol{\beta}$, quanto $\boldsymbol{\beta_i}$, ou quanto a T. No contexto ficará claro)

$\hat{T}_i$ ("pseudo tempo de falha" da i-ésima unidade sob teste)

$\hat{\bullet}$ (estimador genérico)

$\Phi_{nor}(\bullet)$ (fda da distribuição normal padrão)

$\mu_\bullet$ parâmetro de locação genérico da distribuição Lognormal

$\sigma_\bullet$ parâmetro de escala genérico da distribuição Lognormal

$\lambda_{\bullet}$ parâmetro de escala genérico da distribuição Weibull

$\delta_{\bullet}$ parâmetro de forma genérico da distribuição Weibull

X (variável aleatória genérica)

f (função densidade de probabilidade)

R (função de Confiabilidade/Sobrevivência)

Q (percentil)

E (tempo médio até a falha)

MTTF (*mean time to failure* ou tempo médio até a falha)

Var (variância do tempo até a falha)

$(1-\alpha)\%$ (nível de confiança)

Sumário

1 Introdução

Atualmente as empresas têm uma grande preocupação com a confiabilidade de seus produtos e equipamentos. A obtenção da falha dos equipamentos pode ser um problema, uma vez que modelos convencionais para estudo da confiabilidade, baseados na teoria da normalidade dos estimadores de máxima verossimilhança, requerem a ocorrência de falhas. Para preencher essa lacuna, é necessário utilizar os modelos gerais de degradação, os quais permitem a estimação dos tempos de falha através da análise de degradação dos equipamentos ao longo do tempo.

Um livro importante e seminal para dados de degradação é o de Meeker e Escobar (1998), o qual compila vários modelos de degradação, dentre eles o método de aproximação e o método numérico. No livro são também apresentados dados de degradação de laser, os quais este texto de monografia se debruça em sua re-análise pelo método analítico.

Após a impressão do livro de Meeker e Escobar (1998) uma série de artigos foi publicada no tema e, posteriormente, os de maior impacto para a área aparecem no livro de Nikulin et al. (2010). Outra revisão sistemática mais recente pode ser encontrada em Shahraki, Yadav e Liao (2017).

A Seção 1.1 ilustra bem a que contexto se aplicam os modelos de degradação.

1.1 Situação Prática Motivadora

Os dados apresentados na Tabela 1 fazem parte de um exemplo no livro de Meeker e Escobar (1998). Tratam-se de dados de degradação de quinze ($n = 15$) emissores de laser cujas medições aconteceram num período de $t_f = 4000$ horas, isto é, o tempo final do estudo. A cada 250 horas, para cada unidade emissora de laser, registrava-se o percentual de aumento na corrente de operação calculado em relação à corrente nominal de operação, ou seja, aquela do início do ensaio. Note que a informação é importante pois a potência da luz dos lasers se degrada ao longo do tempo se a corrente de operação é mantida constante. Então a corrente de operação precisa ser corrigida ao longo do tempo de uso para garantir a mesma potência de emissão da luz. A medida de degradação y, neste caso, é o percentual de aumento na corrente de operação. A "falha" do laser é definida quando o percentual de aumento na corrente excede 10%. Assim, a partir do limiar $D_f = 10\%$ o laser "falha", embora ainda esteja em operação.

Unidade	Tempo	Desgaste	Unidade	Tempo	Desgaste	Unidade	Tempo	Desgaste	Unidade	Tempo	Desgaste	Unidade	Tempo	Desgaste
1	0	0.00	4	0	0.00	7	0	0.00	10	0	0.00	13	0	0.00
1	250	0.47	4	250	0.36	7	250	0.36	10	250	0.41	13	250	0.30
1	500	0.93	4	500	0.62	7	500	0.92	10	500	1.49	13	500	0.74
1	750	2.11	4	750	1.36	7	750	1.21	10	750	2.38	13	750	1.52
1	1000	2.72	4	1000	1.95	7	1000	1.46	10	1000	3.00	13	1000	1.85
1	1250	3.51	4	1250	2.30	7	1250	1.93	10	1250	3.84	13	1250	2.39
1	1500	4.34	4	1500	2.95	7	1500	2.39	10	1500	4.50	13	1500	2.95
1	1750	4.91	4	1750	3.39	7	1750	2.68	10	1750	5.25	13	1750	3.51
1	2000	5.48	4	2000	3.79	7	2000	2.94	10	2000	6.26	13	2000	3.92
1	2250	5.99	4	2250	4.11	7	2250	3.42	10	2250	7.05	13	2250	5.03
1	2500	6.72	4	2500	4.50	7	2500	4.09	10	2500	7.80	13	2500	5.47
1	2750	7.13	4	2750	4.72	7	2750	4.58	10	2750	8.32	13	2750	5.84
1	3000	8.00	4	3000	4.98	7	3000	4.84	10	3000	8.93	13	3000	6.50
1	3250	8.92	4	3250	5.28	7	3250	5.11	10	3250	9.55	13	3250	6.94
1	3500	9.49	4	3500	5.61	7	3500	5.57	10	3500	10.45	13	3500	7.39
1	3750	9.87	4	3750	5.95	7	3750	6.11	10	3750	11.28	13	3750	7.85
1	4000	10.94	4	4000	6.14	7	4000	7.17	10	4000	12.21	13	4000	8.09
2	0	0.00	5	0	0.00	8	0	0.00	11	0	0.00	14	0	0.00
2	250	0.71	5	250	0.27	8	250	0.46	11	250	0.44	14	250	0.44
2	500	1.22	5	500	0.61	8	500	1.07	11	500	1.00	14	500	0.70
2	750	1.90	5	750	1.11	8	750	1.42	11	750	1.57	14	750	1.05
2	1000	2.30	5	1000	1.77	8	1000	1.77	11	1000	1.96	14	1000	1.35
2	1250	2.87	5	1250	2.06	8	1250	2.11	11	1250	2.51	14	1250	1.80
2	1500	3.75	5	1500	2.58	8	1500	2.40	11	1500	2.84	14	1500	2.55
2	1750	4.42	5	1750	2.99	8	1750	2.78	11	1750	3.47	14	1750	2.83
2	2000	4.99	5	2000	3.38	8	2000	3.02	11	2000	4.01	14	2000	3.39
2	2250	5.51	5	2250	4.05	8	2250	3.29	11	2250	4.51	14	2250	3.72
2	2500	6.07	5	2500	4.63	8	2500	3.75	11	2500	4.80	14	2500	4.09
2	2750	6.64	5	2750	5.24	8	2750	4.16	11	2750	5.20	14	2750	4.83
2	3000	7.16	5	3000	5.62	8	3000	4.76	11	3000	5.66	14	3000	5.41
2	3250	7.78	5	3250	6.04	8	3250	5.16	11	3250	6.20	14	3250	5.76
2	3500	8.42	5	3500	6.32	8	3500	5.46	11	3500	6.54	14	3500	6.14
2	3750	8.91	5	3750	7.10	8	3750	5.81	11	3750	6.96	14	3750	6.51
2	4000	9.28	5	4000	7.59	8	4000	6.24	11	4000	7.42	14	4000	6.88
3	0	0.00	6	0	0.00	9	0	0.00	12	0	0.00	15	0	0.00
3	250	0.71	6	250	0.36	9	250	0.51	12	250	0.39	15	250	0.51
3	500	1.17	6	500	1.39	9	500	0.93	12	500	0.80	15	500	0.83
3	750	1.73	6	750	1.95	9	750	1.57	12	750	1.35	15	750	1.29
3	1000	1.99	6	1000	2.86	9	1000	1.96	12	1000	1.74	15	1000	1.52
3	1250	2.53	6	1250	3.46	9	1250	2.59	12	1250	2.98	15	1250	1.91
3	1500	2.97	6	1500	3.81	9	1500	3.29	12	1500	3.59	15	1500	2.27
3	1750	3.30	6	1750	4.53	9	1750	3.61	12	1750	4.03	15	1750	2.78
3	2000	3.94	6	2000	5.35	9	2000	4.11	12	2000	4.44	15	2000	3.42
3	2250	4.16	6	2250	5.92	9	2250	4.60	12	2250	4.79	15	2250	3.78
3	2500	4.45	6	2500	6.71	9	2500	4.91	12	2500	5.22	15	2500	4.11
3	2750	4.89	6	2750	7.70	9	2750	5.34	12	2750	5.48	15	2750	4.38
3	3000	5.27	6	3000	8.61	9	3000	5.84	12	3000	4.96	15	3000	4.63
3	3250	5.69	6	3250	9.15	9	3250	6.40	12	3250	6.23	15	3250	5.38
3	3500	6.02	6	3500	9.95	9	3500	6.84	12	3500	6.99	15	3500	5.84
3	3750	6.45	6	3750	10.49	9	3750	7.20	12	3750	7.37	15	3750	6.16
3	4000	6.88	6	4000	11.01	9	4000	7.88	12	4000	7.88	15	4000	6.62

Tabela 1: Dados de degradação de laser

A modelagem deste tipo de situação prática se dá através dos modelos gerais de degradação. Estuda-se e modela-se a evolução da degradação y para os itens amostrais e, indiretamente, infere-se sobre a distribuição dos tempos de falha dos itens populacionais e outras quantidades de interesse.

1.2 Organização do trabalho

O texto desta monografia está organizado da seguinte forma. Na Seção 2 delimita-se o objetivo principal, ou seja, o escopo do trabalho. Na Seção 3 apresenta-se a metodologia; de modo que a Seção 3.1 discorre sobre o arcabouço teórico do Modelo Geral de Degradação e dois métodos inferenciais para aplicações mais simples, com maior foco para o Método Aproximado; a Seção 3.2 detalha quantidades de interesse de duas funções distribuição de uso recorrente para inferência em análise de tempos de falha; e a Seção 3.3 descreve brevemente o Método Monte Carlo para construção de intervalos de confiança das quantidades de interesse das funções distribuição. Na Seção 4 realizam-se as análises dos dados de degradação de emissores de laser apresentados na Seção 1.1, além da discussão dos resultados. As considerações finais são apresentadas na Seção 5.

2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é apresentar os modelos gerais de degradação e seus métodos de estimação para casos práticos mais simples. Posteriormente o método aproximado foi aplicado a dados de laser para melhor entendimento prático do mesmo.

3 Metodologia

Nesta seção são apresentados o Modelo Geral de Degradação e dois métodos distintos para realizar o procedimento de inferência, duas distribuições de probabilidade muito úteis para o contexto de confiabilidade de sistemas não reparáveis, e o Método Monte Carlo para construção de intervalos de confiança das quantidades de interesse.

3.1 Modelo Geral de Degradação

Cada unidade de uma amostra ou população de tamanho n é colocada sob teste com intuito de se observar uma característica associada à falha ao longo do tempo. Desta forma realizam-se as medidas de degradação, donde podem-se extrair os perfis de degradação das unidades. A degradação é representada por Y_{ij} , e o modelo é dado por:

$$Y_{ij} = D(t_{ij}, \boldsymbol{\beta_i}) + \varepsilon_{ij}, \tag{3.1}$$

em que t_{ij} é o j-éismo tempo de medição do i-ésimo item sob teste com $i = 1, 2, \ldots, n$ unidades sob teste, $j = 1, 2, \ldots, m_i$ tempos de medição da i-ésima unidade, $\boldsymbol{\beta_i}$ é um vetor de parâmetros da equação $D(t_{ij}, \boldsymbol{\beta_i})$ que modela os perfis de degradação de cada unidade i, e ε_{ij} é o erro do Modelo Geral de Degradação que é independente e identicamente distruibuído (iid), com distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

$D(t_{ij}, \boldsymbol{\beta_i})$ assume uma forma funcional (equação que descreve a degradação) que depende dos parâmetros, de modo que uma fração k dos efeitos do vetor beta pode variar entre as unidades (efeitos aleatórios e os erros ε_{ij}) e outra fração pode ser constante (efeitos fixos).

A fração de falhas no tempo t é a proporção de perfis de degradação que supera o limiar crítico D_f , o qual é pré-definido por fatores físicos, até o tempo t. Assim,a distribuição do tempo de falha T para o modelo (3.1), é obtida como na equação (3.2):

$$
\begin{aligned}
F_{T|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}}(t|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}) &= P(T \leq t|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}) \\
&= P[D(t;\boldsymbol{\beta}) \geq D_f|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}], \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

para medidas de degradação não decrescentes com o tempo. Em que F é a função distribuição acumulada (fda) dos tempos de falha, $\boldsymbol{\beta}$ é a matriz de parâmetros da equação $D(t,\boldsymbol{\beta})$ que modela conjuntamente os n perfis de degradação, e $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros da distribuição dos efeitos $\boldsymbol{\beta}$.

Para medidas de degradação não decrescentes com o tempo utiliza-se a equação (3.3)

$$
\begin{aligned}
F_{T|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}}(t|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}) &= P(T \leq t|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}) \\
&= P[D(t;\boldsymbol{\beta}) \leq D_f|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}]. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

Em termos práticos a equação assumida para $D(t;\boldsymbol{\beta})$ não precisa ser não decrescente para se obter $P[D(t;\boldsymbol{\beta}) \geq D_f|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}]$, nem $D(t;\boldsymbol{\beta})$ precisa ser não crescente para se obter $P[D(t;\boldsymbol{\beta}) \leq D_f|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}]$.

Para estimação dos quantis da distribuição do tempo de falha T com base neste modelo de degradação é necessário estimar o vetor de efeitos fixos $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q)'$ que indexa a distribuição do vetor de parâmetros da distribuição $\boldsymbol{\beta}$.

Quando os perfis de degradação assumem formas funcionais simples a distribuição $F_{T|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}}(t|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta})$ pode ser obtida de forma analiticamente fechada. Se a forma funcional de $D(t_{ij};\boldsymbol{\beta_i})$ é polinomial, e a dimensão do vetor $\boldsymbol{\beta_i}$ é maior que 1, a obtenção em forma analítica de $F_{T|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}}(t|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta})$ torna-se complicada e a avaliação é feita numericamente.

3.1.1 Método Aproximado

Os passos para utilizar o método aproximado são relativamente simples. Para todas as unidades amostrais ajusta-se o modelo da equação (3.1), isto é:

$$
Y_{ij} = D(t_{ij},\boldsymbol{\beta_i}) + \varepsilon_{ij}.
$$

Posteriormente, resolve-se $D(T_i, \boldsymbol{\beta_i}) = D_f$, em relação a T_i, para cada unidade amostral, donde obtém-se $\hat{T_i}$'s, os "pseudo tempos de falha". O número de unidades amostrais será igual ao número de "pseudo tempos de falha". Assim, todas as unidades amostrais teriam experimentado o evento de falha quando se atingisse o limiar de falha D_f. Esses pseudo tempos de falha devem ser utilizados para estimar $F(t)$ através de técnicas tradicionais de análise de tempos de falha.

É importante deixar claro que, no caso do Método Aproximado, estima-se a equação $D(T_i, \boldsymbol{\beta_i})$ do modelo para cada perfil de degradação. Ou seja, o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta_i}$ é composto apenas por efeitos fixos. Essa característica permite que o método seja de fácil aplicação, pois a maioria dos softwares estatísticos possuem bibliotecas para estimação de parâmetros de efeitos fixos de modelos lineares e não lineares. Este é o motivo pelo qual este texto optou pela aplicação deste método aos dados de emissores de laser.

3.1.2 Método Analítico

Para modelos simples a função $F(t)$ pode ser descrita como uma função dos parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ em forma fechada. Suponha uma degradação linear com intercepto nulo. Isto é, com função de degradação como na equação (3.4)

$$D_{ij}(t) = \beta_i t, \tag{3.4}$$

em que β_i é a taxa de degradação aleatória que distingue os perfis de degradação das unidades sob teste.

Seja D_f o limiar de degradação que é alcançado no tempo de falha T_i, então a equação (3.4) torna-se a equação (3.5):

$$D_f = \beta_i T_i \Longrightarrow T_i = \frac{D_f}{\beta_i}. \tag{3.5}$$

Assuma que o coeficiente associado à taxa de degradação siga a distribuição Lognormal ($\beta_i \overset{iid}{\sim} Lognormal(\mu_\beta, \sigma_\beta)$), ou seja, $\boldsymbol{\theta} = (\mu_\beta, \sigma_\beta)$. A partir da equação (3.5) é possível obter a fda de T como na equação (3.6):

$$\begin{aligned}
F(t|\boldsymbol{\theta}) &= P(T_i \leq t|\boldsymbol{\theta}) \\
&= P(D(t;\beta_i) > D_f|\boldsymbol{\theta}) \\
&= P(\beta_i t > D_f|\boldsymbol{\theta}) \\
&= P\left(\beta_i > \frac{D_f}{t}\middle|\boldsymbol{\theta}\right) \\
&\overset{log(\beta_i)\overset{iid}{\sim}N(\mu_\beta,\sigma_\beta)}{=} 1 - \Phi_{nor}\left(\frac{[log(D_f/t)] - \mu_\beta}{\sigma_\beta}\right) \\
&= 1 - \Phi_{nor}\left(\frac{-log(t) - [\mu_\beta - log(D_f)]}{\sigma_\beta}\right) \\
&= \Phi_{nor}\left(\frac{log(t) - [log(D_f) - \mu_\beta]}{\sigma_\beta}\right),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

em que $\Phi_{nor}(\bullet)$ é a fda da distribuição normal padrão.

Nota-se da equação (3.6) que $T_i \overset{iid}{\sim} Lognormal(\mu_T = log(D_f) - \mu_\beta, \sigma_T = \sigma_\beta)$. As quantidades de interesse devem ser extraídas da função distribuição de T_i.

Um apontamento importante sobre o método é que ele necessita que o software utilizado seja capaz de estimar parâmetros da equação $D(T_i, \boldsymbol{\beta_i})$ do modelo, com efeitos fixos e aleatórios do vetor $\boldsymbol{\beta_i}$. Essa é uma diferença considerável em relação ao método aproximado, uma vez que é comum adotar-se distribuições de probabilidade não normais para os efeitos aleatórios e os softwares não possuem bibliotecas de estimação para modelos com efeitos aleatórios distintos da distribuição normal. Ainda, é necessário que se obtenha, analiticamente e de forma fechada, a distribuição de probabilidade de T_i a partir de $\boldsymbol{\beta_i}$, o que nem sempre é possível. Uma vez que este texto visa a aplicação de um método mais simples, optou-se por apenas apresentar o método analítico para conhecimento do leitor de que existem outras possibilidades de estimação em modelos de degradação.

3.2 Funções Distribuições Úteis para este Estudo

Nesta seção apresentam-se duas distribuições de probabilidade flexíveis o suficiente para que seja possível realizar as análises dos dados de emissores de laser. As quantidades de interesse utilizadas para caracterizar a distribuição dos tempos de falha também são explicitadas nesta seção.

3.2.1 Distribuição Weibull

A função densidade de probabilidade (fdp) de uma variável aleatória $X \sim Weibull(\lambda, \delta)$ é dada pela equação (3.7):

$$f(t|\lambda, \delta) = \frac{\delta}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\delta-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\delta}}, \tag{3.7}$$

em que $(\lambda, \delta) > 0,\ x \geq 0$, são os espaços paramétricos dos parâmestros de escala e forma, e o espaço amostral de X, respectivamente. Se $\delta = 1$, então $X \sim Exponencial(\lambda)$.

A fda de X para o modelo Weibull é dada pela equação (3.8):

$$F(t|\lambda, \delta) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\delta}\right\}. \tag{3.8}$$

A função de confiabilidade é dada pela equação (3.9):

$$R(x|\lambda, \delta) = \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\delta}\right\}. \tag{3.9}$$

O percentil de ordem p é dado pela equação (3.10):

$$Q(p|\lambda, \delta) = \lambda[-log(1-p)]^{1/\delta}. \tag{3.10}$$

A esperança (ou tempo médio até a falha - MTTF, para o contexto deste texto) é dada pela equação (3.11):

$$E(X|\lambda, \delta) = MTTF = \lambda\Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right). \tag{3.11}$$

A variância é dada pela equação (3.12):

$$Var(X|\lambda,\delta) = \lambda^2 \left\{ \left(1+\frac{2}{\delta}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\right]^2 \right\}. \tag{3.12}$$

As funções nas equações 3.8, 3.9, 3.10, 3.11 e 3.12, são as quantidades de interesse mais usuais a serem inferidas para o contexto de aplicações práticas em análise de tempo de falha.

3.2.2 Distribuição Lognormal

A fdp de uma variável aleatória $X \sim Lognormal(\mu, \sigma)$ é dada pela equação (3.13):

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \tag{3.13}$$

em que $-\infty \leq \mu \geq \infty,\ (\sigma, x) \geq 0$, são os espaços paramétricos dos parâmestros de locação e escala, e o espaço amostral de X, respectivamente.

A fda é dada pela equação (3.14):

$$F(x|\mu,\sigma) = \Phi_{nor}\left(\frac{[log(D_f/t)] - \mu_\beta}{\sigma_\beta} \right). \tag{3.14}$$

A função de sobrevivência é dada pela equação (3.9):

$$R(x|\mu,\sigma) = 1 - \Phi_{nor}\left(\frac{[log(D_f/t)] - \mu_\beta}{\sigma_\beta} \right). \tag{3.15}$$

O percentil de ordem p é dado pela equação (3.16):

$$Q(p|\mu,\sigma) = \exp\left\{ z_p\sigma - \mu \right\}, \tag{3.16}$$

em que $z_p = \Phi_{nor}^{-1}(p)$ é o percentil de ordem p da distribuição normal padrão.

A esperança é dada pela equação (3.17):

$$E(X|\mu,\sigma) = MTTF = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}. \tag{3.17}$$

A variância é dada pela equação (3.18):

$$Var(X|\mu,\sigma) = \exp\left[2\mu + \sigma^2\right]\left[\exp\left(\sigma^2\right) - 1\right]. \tag{3.18}$$

3.3 Monte Carlo para a construção de intervalos de confiança

O Método de Monte Carlo é uma técnica estatística que utiliza simulações para obter estimativas de parâmetros. Para a construção do intervalo de confiança, o método simula "s" amostras aleatórias da distribuição ou parâmetros desejados, com isso uma distribuição amostral, da qual obtém-se um intervalo de confiança.

É possível encontrar exemplos práticos aplicados em Robert e Casella (2004).

Para o contexto deste texto os Intervalos de Confiança são obtidos como a seguir.

Denote por $QI_{X|\boldsymbol{\theta}}(x)$ a quantidade de interesse característica da distribuição do tempo até a Falha com função densidade de probabilidade $f(x|\boldsymbol{\theta})$, tais como percentis, função fração de falha, confiabilidade, tempo médio até a falha, etc. Siga o procedimento abaixo para gerar as amostras Monte Carlo:

1. **Passo 1:** geração das amostras Monte Carlo
   (a) gere uma amostra $X_1, \ldots, X_n$ a partir de $f(x|\boldsymbol{\theta})$;
   (b) estime $\boldsymbol{\theta}$, a partir dessa nova amostra, através do estimador $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ para obter $\hat{\boldsymbol{\theta}}_h$, em que $h = 1, \ldots, s$, com s igual ao tamanho da amostra Monte Carlo que se deseja;
   (c) aplique $\hat{\boldsymbol{\theta}}_h$ em $QI_{X|\boldsymbol{\theta}}(x|\boldsymbol{\theta})$ e obtenha uma única amostra da quantidade de interesse $QI_{X|\boldsymbol{\theta}}(x|\hat{\boldsymbol{\theta}}_h)_h$;
   (d) repita o procedimento até obter uma amostra Monte Carlo de Tamanho s, isto é, $QI_{X|\boldsymbol{\theta}}(x|\hat{\boldsymbol{\theta}}_1)_1, \ldots, QI_{X|\boldsymbol{\theta}}(x|\hat{\boldsymbol{\theta}}_s)_s$;

2. **Passo 2:** encontre os percentis $qi_{\alpha/2\%}$ e $qi_{1-\alpha/2\%}$, a partir da amostra $QI_{X|\boldsymbol{\theta}}(x|\hat{\boldsymbol{\theta}}_1)_1, \ldots, QI_{X|\boldsymbol{\theta}}(x|\hat{\boldsymbol{\theta}}_s)_s$, para obter um Intervalo de Confiança percentílico com $(1-\alpha)\%$ de Confiança para $QI_{X|\boldsymbol{\theta}}(x)$. Isto é, $IC[(1-\alpha)\%, QI_{X|\boldsymbol{\theta}}(x)] = [qi_{\alpha/2\%}, qi_{1-\alpha/2\%}]$,

em que $(1-\alpha)\%$ é o nível de confiança e $0 \leq \alpha \leq 1$.

4 Resultados e Discussão

Na Seção 3.2.2 foram apresentados os dados de degradação de emissores de laser.

A figura 1 apresenta os perfis de evolução da degradação para todos as unidades emissoras de laser. Este é um caso mandatório para uso dos modelos de degradação. As medidas de degradação correspondem aos círculos e as linhas que os conectam servem de referência para distinguir as diferentes itens sob teste. O limiar de degradação $D_f = 10\%$ associado à falha corresponde à linha tracejada vermelha. Repare que os perfis de degradação apresentam incrementos monótonos não decrescentes, então a obtenção da função distribuição através dos modelos de degradação se dá conforme a equação (3.2). Observe que apenas 3 emissores de laser possuem degradação que ultrapassa o limite pré-definido, e a primeira falha só ocorre entre 3250 horas e 3500 horas. Outra observação relevante é a de que os perfis são aproximadamente lineares no tempo, ou seja, a degradação cresce linearmente com o tempo, e por esse motivo a forma funcional adotada para descrever a degradação será linear.

4.1 Método Apróximado

De acordo com a primeira etapa da aplicação do Método Aproximado apresentado na Seção 3.1.1, com a informação dos perfis aproximadamente lineares da figura 1, a partir da equação (3.1) assume-se a forma funcional na equação (4.1):

$$D(t_{ij}, \beta_i) = \beta_i t, \tag{4.1}$$

do modelo geral de degradação na equação (4.2):

$$Y_{ij} = \beta_i t + \varepsilon_{ij}, \tag{4.2}$$

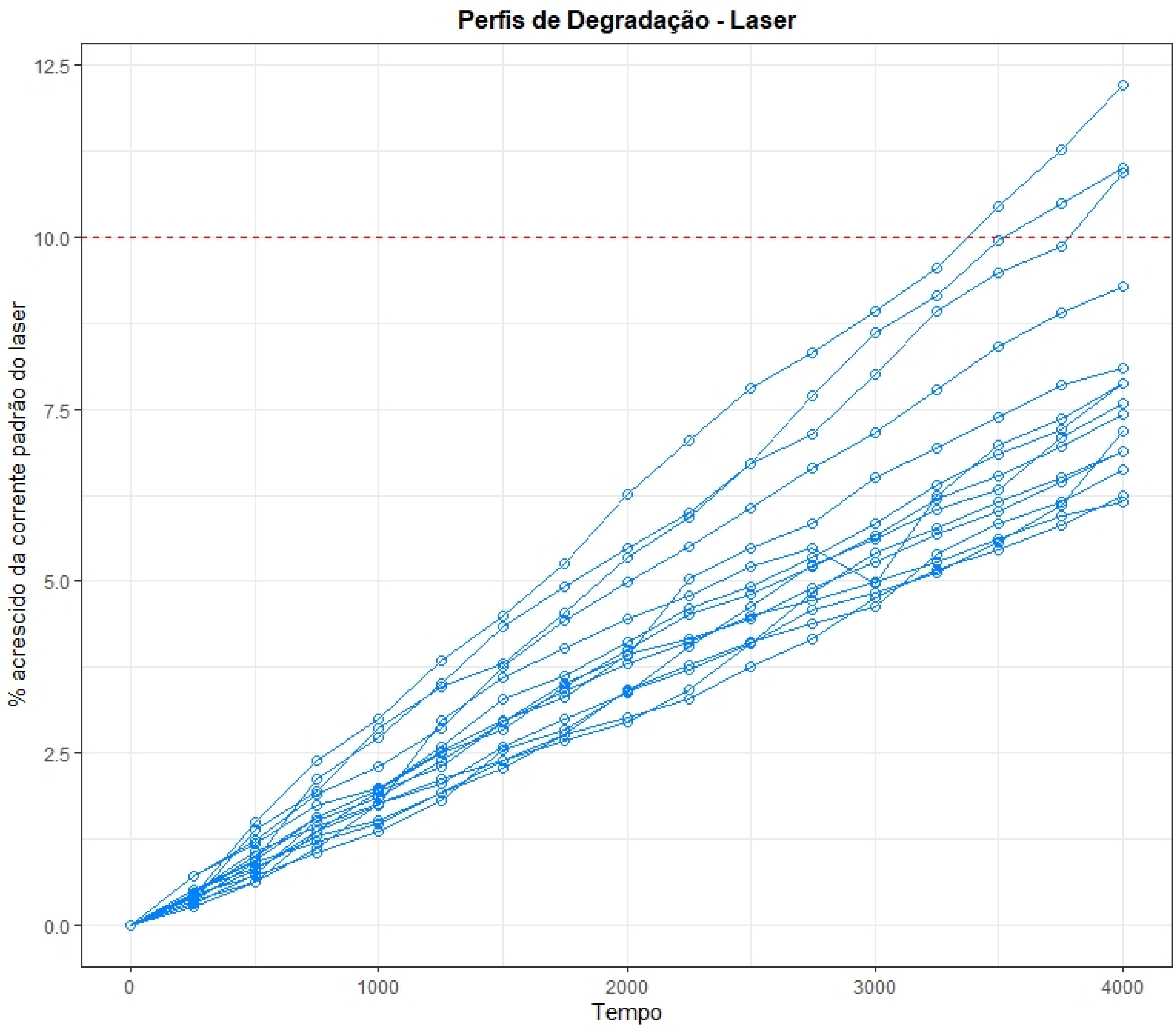

Figura 1: Perfis de Degradação

em que $\varepsilon_{ij} \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n = 15$ unidades, $j = 1, 2, \ldots, m_i = 17$ tempos de medição da i-ésima unidade, β_i é a taxa/velocidade de degradação de cada unidade i sob teste, e t_{ij} é o j-ésimo tempo de medição do i-ésimo item sob teste.

Note que a equação da reta de regressão $\beta_i t$ de todas as unidades sob teste possui intercepto igual a zero.

Para ajuste das retas $n = 15$ de regressão utilizou-se o Software R 4.3.2 (R Core Team, 2023). Mais especificamente, os ajustes encontram-se nas linhas de código do Anexo A, realizados através da função "lm()"do pacote nativo "stats". Como todo procedimento estatístico inferencial e descritivo deste texto foi realizado no software supracitado, a partir desse ponto serão referenciadas apenas as funções e pacotes.

De posse das estimativas dos coeficientes de regressão de cada emissor de laser é possível estimar os "pseudo tempos de falha" $\hat{T}_i^{\prime}s$, então iguala-se $D(t_{ij}, \hat{\beta}_i) = D_f$ na equação (4.1), donde se obtém o estimador na equação (4.3):

$$D(t_{ij}, \hat{\beta}_i) = D_f = \hat{\beta}_i \hat{T}_i \Longrightarrow \hat{T}_i = \frac{D_f}{\hat{\beta}_i}, \tag{4.3}$$

.

As estimativas obtidas pelo estimador na equação (4.3) podem ser acessadas pela execução dos códigos no Anexo A.

4.2 Ajuste dos Modelos Paramétricos

De posse das estimativas $\hat{T}_i^{\prime}s$ obtidas pela equação (4.3) ajustam-se 3 modelos paramétricos para os "pseudo tempos de falha" a saber, os modelos $\hat{T}_i \overset{iid}{\sim} Exponencial(\lambda_e)$, $\hat{T}_i \overset{iid}{\sim} Weibull(\lambda_w, \delta_w)$ e $\hat{T}_i \overset{iid}{\sim} Lognormal(\mu_L, \sigma_L)$.

A Figura 2 apresenta as "Estimativas de Kaplan-Meier" **versus** "Estimativas dos Modelos Paramétricos" para a função de sobrevivência $R(T)$ avaliada nos "pseudo tempos de falha". Se o modelo for adequado, então os pontos em vermelho no gráfico devem acompanhar a reta $x = y$, o que acontece para os modelos Weibull e Lognormal. Quanto mais próximos os pontos estiverem da reta $x = y$, melhor será a qualidade de ajuste, que parece ser o caso do Modelo Weibull.

Detalhes de métodos gráficos para avaliação de adequação e qualidade de ajuste no

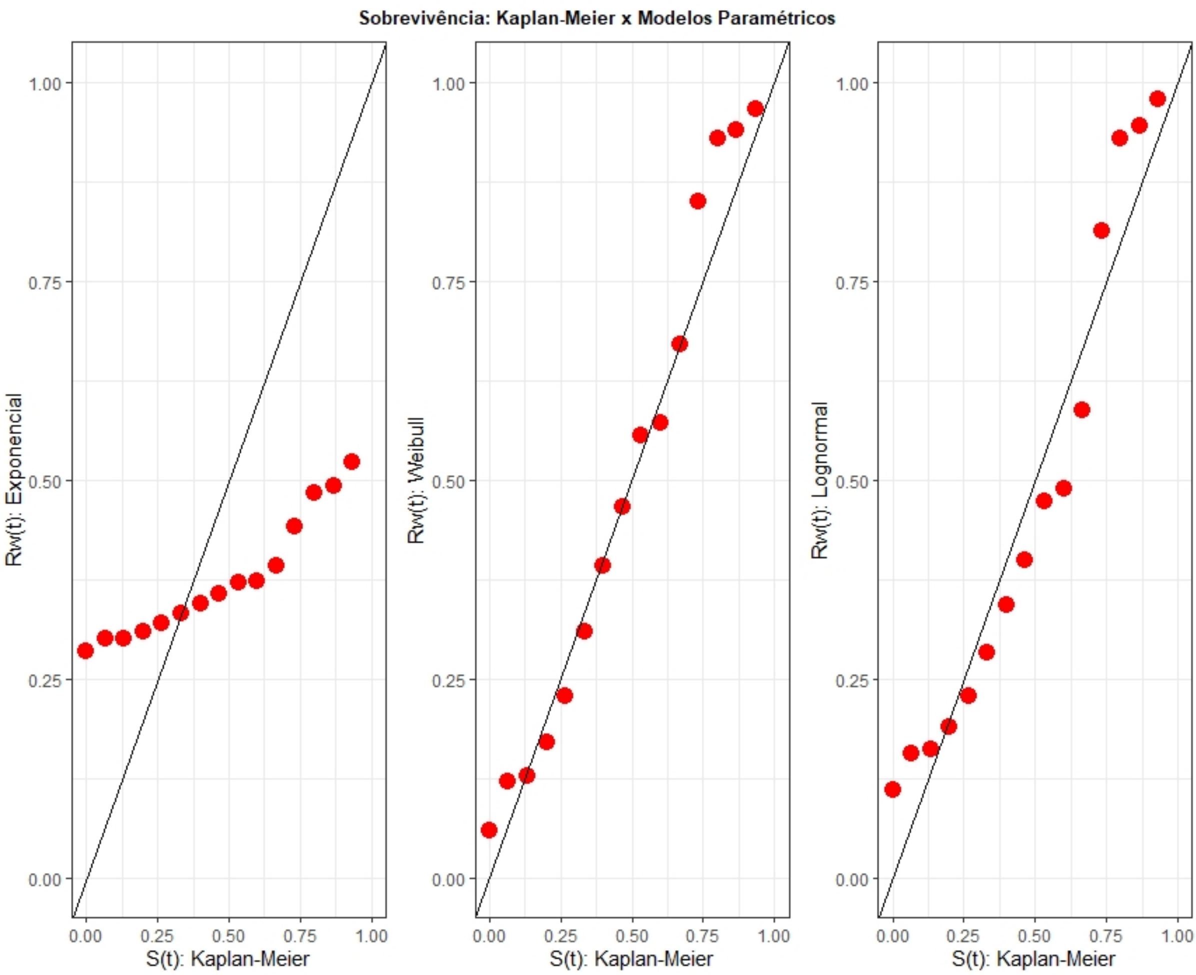

Figura 2: $R(T)$: Kaplan-Meier versus Modelos Paramétricos (Exponencial, Weibull e Lognormal, respectivamente.)

contexto de dados confiabilidade (ou sobrevivência) podem ser encontrados em Freitas e Colosimo (1997) e Colosimo e Giolo (2021), referências que também discorrem sobre a estimação de a função de sobrevivência através do estimador de Kaplan-Meier. As estimativas de $R(T)$ foram obtidas das equações (3.9) e (3.15). As estimativas de Kaplan-Meier para $R(T)$ foram obtidas da função "survfit()" do pacote "survival" (THERNEAU, 2015). Para o ajuste dos modelos utilizou-se a função "survreg()" do mesmo pacote.

4.3 Quantidades de Interesse: Estimativas Pontuais e Intervalares

Na Seção 4.2 constatou-se que os melhores ajustes para os "pseudo tempos de falha" foram os dos modelos Weibull e Lognormal, isto é $\hat{T}_i \overset{iid}{\sim} Weibull(\hat{\lambda}_W = 5487,61; \hat{\delta}_W = 6,63)$ e $\hat{T}_i \overset{iid}{\sim} Lognormal(\hat{\mu}_L = 8,52; \hat{\sigma}_L = 0,20)$ respectivamente.

De posse das estimativas dos parâmetros das distribuições dos modelos ajustados é possível estimar a Confiabilidade no tempo 4500 horas, Tempo Médio até a Falha e Percentis $p\%$, com $p = (1, 5, 10, 50, 80)$, através das equações (3.9), (3.11) e (3.10), respectivamente, para o ajuste Weibull. Para o modelo Lognormal as mesmas quantidades de interesse são estimadas pelas equações (3.15), (3.17), (3.16). Os intervalos percentílicos de 95% de Confiança para as quantidades de interesse são obtidos através do procedimento Monte Carlo apresentado na Seção 3.3.

As estimativas das quantidades de interesse são apresentadas na Tabela 4.3. Observa-se que as estimativas para a distribuição Lognormal são ligeiramente maiores do que as da distribuição Weibull, o que já era esperado por conta dos pontos do método gráfico serem um pouco mais dispersos para o modelo Lognormal.

Para a distribuição Lognormal:

- o tempo médio até a falha dos lasers é de 5104,21 horas
- a fração de falha ao operar até 3109,59 horas é de 0,01, ou seja, 1% dos emissores de laser falha antes desse tempo. Ao operar até 3573,56 horas a fração de falha é de 0,05, ao operar até 3848,58 horas é de 0,10, ao operar até 4999,02 horas é de 0,5 e ao operar até 5935,78 horas é de 0,8.
- a probabilidade de um emissor de laser sobreviver além de 4500 horas é de 0,70.

Para a distribuição Weibull:

Tabela 2: Parâmetros - Método Apróximado

Medida	Estimativa	IC (95%)	Amplitude
R4500 - Lognormal	0,6968	(0,5058 ; 0,8910)	0,3852
MTTF - Lognormal	5104,2110	(4603,12 ; 5657,00)	1053,88
Percentil 1% - Lognormal	3109,59	(2604,20 ; 3852,90)	1248,70
Percentil 5% - Lognormal	3573,56	(3090,59 ; 4255,89)	1165,30
Percentil 10% - Lognormal	3848,58	(3382,95 ; 4480,99)	1098,04
Percentil 50% - Lognormal	4999,02	(4503,00 ; 5537,02)	1034,02
Percentil 80% - Lognormal	5935,78	(5232,16 ; 6632,16)	1400,01
R4500 - Weibull	0,7550	(0,6167 ; 0,8460)	0,2293
MTTF - Weibull	5095,815	(4670,87 ; 5507,07)	836,20
Percentil 1% - Weibull	2736,44	(2506,34 ; 2950,29)	443,95
Percentil 5% - Weibull	3495,55	(3197,71 ; 3766,48)	568,77
Percentil 10% - Weibull	3902,66	(3577,74 ; 4200,25)	622,52
Percentil 50% - Weibull	5173,09	(4747,44 ; 5594,86)	847,41
Percentil 80% - Weibull	5875,31	(5381,60 ; 6346,22)	964,62

- o tempo médio até a falha dos lasers é de 5095,82 horas;
- a fração de falha ao operar até 2736,44 horas é de 0,01; ao operar até 3495,55 horas é de 0,05; ao operar até 3902,66 horas é de 0,1; ao operar até 5173,09 horas é de 0,5; e ao operar até 5875,31 horas é de 0,8
- a probabilidade de um emissor de laser sobreviver além de 4500 horas é de 0,76.

Apesar das diferenças pontuais nas estimativas, os Intervalos de Confiança obtidos pelo Método de Monte Carlo se sobrepõem para ambos os modelos, o que significa que são estatisticamente iguais, então os resultados são igualmente satisfatórios. Contudo, observa-se que a amplitude dos intervalos de confiança para o ajuste Weibull é consistentemente menor para todas as estimativas. Cabe ao especialista da área adotar o modelo que faça melhor sentido prático. Em geral essa escolha perpassa a forma da função de risco de falha e propriedades físicas do item sob teste.

5 Considerações finais

O objetivo principal deste trabalho foi apresentar a metodologia e contexto de aplicação os Modelos Gerais de Degradação para casos mais simples.

Através do Modelo Geral de Degradação pelo Método Aproximado, para medidas de percentual de aumento da corrente de operação de emissores de laser, foi possível inferir sobre a distribuição dos tempos de falha dos mesmos. Pela visualização dos perfis de degradação poucas unidades de lasers atingiam o limiar de falha $df = 10\%$ definido, situação clássica para aplicação dos Modelos Gerais de Degradação.

Alguns modelos paramétricos foram ajustados aos "pseudo tempos de falha", de modo que os mais adequados foram os modelos Weibull e Lognormal. O modelo Weibull apresentou o melhor ajuste. As estimativas das quantidades de interesse e seus intervalos de confiança, no que tange aos modelos Weibull e Lognormal, permitiram extrair as seguintes informações inferenciais:

O tempo médio até a falha estimado foi pontualmente superior na distribuição Lognormal, assim como a maior parte dos percentis analisados. A probabilidade de um emissor de laser sobreviver além de 4500 horas é de 0,76, enquanto na distribuição Weibull é de 0,7.

Apesar das diferenças pontuais nas estimativas, os Intervalos de Confiança obtidos pelo Método de Monte Carlo se sobrepõem para ambos os modelos, o que significa que são estatisticamente iguais. Entretanto, observou-se que a amplitude dos intervalos de confiança para o ajuste Weibull é consistentemente menor para todas as estimativas. O especialista em emissores de laser fica imbuído da escolha de qual modelo utilizar.

Referências

COLOSIMO, E. A.; GIOLO, S. R. *Análise de sobrevivência aplicada*. [S.l.]: Editora Blucher, 2021.

FREITAS, M. A.; COLOSIMO, E. A. *Confiabilidade: análise de tempo de falha e testes de vida acelerados*. [S.l.]: Escola de Engenharia da UFMG/Fundacao Christiano Ottoni, 1997.

MEEKER, W.; ESCOBAR, L. A. *Statistical Methods for Reliability Data*. 1. ed. [S.l.]: Wiley Series in Probability and Statistics: New York, 1998.

NIKULIN, M. et al. *Advances in degradation modeling*. [S.l.]: Springer, 2010.

R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2023. Disponível em: <https://www.R-project.org/>.

ROBERT, C.; CASELLA, G. *Monte Carlo Statistical Methods*. 2. ed. [S.l.]: Springer, 2004.

SHAHRAKI, A. F.; YADAV, O. P.; LIAO, H. A review on degradation modelling and its engineering applications. *International Journal of Performability Engineering*, v. 13, p. 299–314, 05 2017.

THERNEAU, T. M. *A Package for Survival Analysis in S*. [S.l.], 2015. Version 2.38. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=survival>.

ANEXO A – Primeiro anexo

```
####PACOTES####

install.packages('survival')
install.packages('ggplot2')
install.packages('gridExtra')
install.packages('grid')
install.packages('flexsurv')
install.packages('lme4')
install.packages('nlme')

library(survival)
library(ggplot2)
library(gridExtra)
library(grid)
library(flexsurv)
library(lme4)
library(nlme)

####Funções####

#Funções - Lognormal

Lognormal.R4500 = function(x,y){
  fit_L = survreg(Surv(x,y) ~ 1, dist = "lognormal")
  sig_L = fit_L$scale
  mi = fit_L$icoef
  m_L = mi[1]
```

```
  Rt_L = pnorm(-(log(4500)-m_L)/sig_L)
  Rt_L
}
Lognormal.MTTF = function(x,y){
  fit_L = survreg(Surv(x,y) ~ 1, dist = "lognormal")
  sig_L = fit_L$scale
  mi = fit_L$icoef
  m_L = mi[1]
  MTTF_L = exp(m_L+(sig_L^2)/2)
  MTTF_L
}
Lognormal.Perc1 = function(x,y){
  fit_L = survreg(Surv(x,y) ~ 1, dist = "lognormal")
  sig_L = fit_L$scale
  mi = fit_L$icoef
  m_L = mi[1]
  Z1 = qnorm(0.01)
  Perc.1_L = exp(Z1*sig_L+m_L)
  Perc.1_L
}
Lognormal.Perc5 = function(x,y){
  fitL = survreg(Surv(x,y) ~ 1, dist = "lognormal")
  sigL = fitL$scale
  mi = fitL$icoef
  mL = mi[1]
  Z5 = qnorm(0.05)
  Perc5L = exp(Z5*sigL+mL)
  Perc5L
}
Lognormal.Perc10 = function(x,y){
  fitL = survreg(Surv(x,y) ~ 1, dist = "lognormal")
  sigL = fitL$scale
  mi = fitL$icoef
  mL = mi[1]
  Z10 = qnorm(0.1)
```

```
  Perc10L = exp(Z10*sigL+mL)
  Perc10L
}
Lognormal.Perc50 = function(x,y){
  fitL = survreg(Surv(x,y) ~ 1, dist = "lognormal")
  sigL = fitL$scale
  mi = fitL$icoef
  mL = mi[1]
  Z50 = qnorm(0.5)
  Perc50L = exp(Z50*sigL+mL)
  Perc50L
}
Lognormal.Perc80 = function(x,y){
  fitL = survreg(Surv(x,y) ~ 1, dist = "lognormal")
  sigL = fitL$scale
  mi = fitL$icoef
  mL = mi[1]
  Z80 = qnorm(0.8)
  Perc80L = exp(Z80*sigL+mL)
  Perc80L
}

#Funções - Weibull
Weibull.Rt = function(x,y){
  fitW = survreg(Surv(x,y) ~ 1, dist = "weibull")
  sigW = mfit_W$scale
  mi = fitW$icoef
  mW = mi[1]
  shape = 1/sigW
  scale = exp(mW)
  RtW = exp(-(4500/scale)^shape)
  RtW
}
Weibull.MTTF = function(x,y){
  fitW = survreg(Surv(x,y) ~ 1, dist = "weibull")
```

```
  sigW = mfit_W$scale
  mi = fitW$icoef
  mW = mi[1]
  shape = 1/sigW
  scale = exp(mW)
  MTTFW = scale*gamma(1+(1/shape))
  MTTFW
}
Weibull.Perc1 = function(x,y){
  fitW = survreg(Surv(x,y) ~ 1, dist = "weibull")
  sigW = mfit_W$scale
  mi = fitW$icoef
  mW = mi[1]
  shape = 1/sigW
  scale = exp(mW)
  Perc1W = scale*(-log(1-0.01))^(1/shape)
  Perc1W
}
Weibull.Perc5 = function(x,y){
  fitW = survreg(Surv(x,y) ~ 1, dist = "weibull")
  sigW = mfit_W$scale
  mi = fitW$icoef
  mW = mi[1]
  shape = 1/sigW
  scale = exp(mW)
  Perc5W = scale*(-log(1-0.05))^(1/shape)
  Perc5W
}
Weibull.Perc10 = function(x,y){
  fitW = survreg(Surv(x,y) ~ 1, dist = "weibull")
  sigW = mfit_W$scale
  mi = fitW$icoef
  mW = mi[1]
  shape = 1/sigW
  scale = exp(mW)
```

```
  Perc50W = scale*(-log(1-0.1))^(1/shape)
  Perc50W
}
Weibull.Perc50 = function(x,y){
  fitW = survreg(Surv(x,y) ~ 1, dist = "weibull")
  sigW = mfit_W$scale
  mi = fitW$icoef
  mW = mi[1]
  shape = 1/sigW
  scale = exp(mW)
  Perc50W = scale*(-log(1-0.5))^(1/shape)
  Perc50W
}
Weibull.Perc80 = function(x,y){
  fitW = survreg(Surv(x,y) ~ 1, dist = "weibull")
  sigW = mfit_W$scale
  mi = fitW$icoef
  mW = mi[1]
  shape = 1/sigW
  scale = exp(mW)
  Perc80W = scale*(-log(1-0.8))^(1/shape)
  Perc80W
}



# Função para estimação dos intervalos de confiança via Monte Carlo
IC = function(x){
  quantile(x, c(0.025,0.975))
}

# Função para calcular a amplitude dos intervalos de confiança via Monte Carlo
amplitude=function(y){y[2]-y[1]}

#Monte Carlo - Lognormal
```

```
MC_l = function(est, censura, media, variancia, n, amostra){
  tempos = vector("numeric", n)
  estimativas = vector("numeric", amostra)
  for (i in 1:amostra) {
    tempos = rlnorm(n, media, variancia)
    estimativas[i] = est(tempos, censura)
  }
  estimativas
}

#Monte Carlo - Weibull
MC_W = function(est, censura, forma, escala, n, amostra){
  tempos = vector("numeric", n)
  estimativas = vector("numeric", amostra)
  for (i in 1:amostra) {
    tempos = rweibull(n, forma, escala)
    estimativas[i] = est(tempos, censura)
  }
  estimativas
}

####LEITURA DOS DADOS####
# Os dados estão disponíveis no sítio: https://drive.google.com/ (cont.)
# file/d/1qbH1qgFsDQX16_9bVWoMVcviyiqOh9Kj/view?usp=sharing

dados <- read.delim("CAMINHO/DesgLaser.txt")

View(dados)
df = 10

####PLOTANDO O PERFIL DA MEDIDA DE DEGRADAÇÃO####
ggplot(dados) +
  aes(x = Tempo, y = Desgaste, group = Unidade) +
  geom_point(shape = "circle open", colour = "#0082FF", size = 2) +
  geom_line(colour = "#0082FF") +
```

```
  labs(x = "Tempo", y = "% acrescido da corrente padrão do laser",
       title = "Perfis de Degradação - Laser") +
  theme_bw() +
  geom_hline(yintercept = 10, linetype = "dashed", color = "red") +
  theme(
    plot.title = element_text(size = 12L,
                              face = "bold",
                              hjust = 0.5)
  )
set.seed(123)
####TESTE DE VIDA CONVENCIONAL: AJUSTE LOGNORMAL####

# Esse será o vetor que irá receber os coeficientes.
coeficientes_Lognormal = vector("numeric", 15)
# Para estimar os pseudos tempos de falha, colocamos os coeficientes da
# regressão no vetor definido anteriormente
for (i in 1:15){
  coeficientes_Lognormal [i] = lm(dados$Desgaste ~ dados$Tempo - 1,
  subset = dados$Unidade==i)$coef
}
# Vetores e matrizes que serão utilizados para guardar os pseudo
# tempos de falha.
pseudos.tf_L = df/coeficientes_Lognormal
pseudos.tf_Ld = matrix(pseudos.tf_L, ncol = 1)
pseudos.tf_Ld

# Vetor com a codificação de censura e falha (nesta base todos são falhas)
b = 1
status = rep(b,15)

# Teste de vida para Lognormal
mfit_L = survreg(Surv(pseudos.tf_L, status) ~ 1, dist = "lognormal")
summary(mfit_L)

# Definindo variáveis para sigma e mu estimados da Lognormal, obtidos
```

```
# anteriormente.
sigma_L = mfit_L$scale
mu_L = mfit_L$coefficients[1]

# Armazenando os percentis
Z1 = qnorm(0.01)
Z5 = qnorm(0.05)
Z10 = qnorm(0.1)
Z50 = qnorm(0.5)
Z80 = qnorm(0.8)

##RESULTADO##
# Obtendo resultados de sobrevivência, média e percentis estimados

# - Método Aproximado#

R4500.Aproximado_L = pnorm(-(log(4500)-mu_L)/sigma_L)
MTTF.Aproximado_L = exp(mu_L+(sigma_L^2)/2)
Percentil1.Aproximacao_L  = exp(Z1*sigma_L+mu_L)
Percentil5.Aproximacao_L  = exp(Z5*sigma_L+mu_L)
Percentil10.Aproximacao_L = exp(Z10*sigma_L+mu_L)
Percentil50.Aproximacao_L = exp(Z50*sigma_L+mu_L)
Percentil80.Aproximacao_L = exp(Z80*sigma_L+mu_L)

####TESTE DE VIDA CONVENCIONAL: AJUSTE WEIBULL####

# Esse será o vetor que irá receber os coeficientes.
coeficientes_Weibull = vector("numeric", 15)
# Para estimar os pseudos tempos de falha, colocamos os coeficientes
# da regressão no vetor definido anteriormente
for (i in 1:15){
  coeficientes_Weibull[i] = lm(dados$Desgaste ~ dados$Tempo - 1,
  subset = dados$Unidade==i)$coef
}
```

```
# Vetores e matrizes que serão utilizados para guardar os pseudo
# tempos de falha.
pseudos.tf_W = df/coeficientes_Weibull
pseudos.tf_Wd  = matrix(pseudos.tf_W, ncol = 1)
pseudos.tf_Wd

# Teste de vida para Weibull
mfit_W = survreg(Surv(pseudos.tf_W, status) ~ 1, dist = "weibull")
summary(mfit_W)

# Definindo variáveis para sigma e mu estimados da Weibull, obtidos
# anteriormente.
sigma_W = mfit_W$scale
mu_W = mfit_W$coefficients[1]

# Parâmetros
shape_W = 1/sigma_W
scale_W = exp(mu_W)

##RESULTADOS##
# Obtendo resultados de sobrevivência, média e percentis estimados
# - Método Aproximado.

R4500.Aproximado_W = exp(-(4500/scale_W)^shape_W)
MTTF.Aproximado_W = scale_W*gamma(1+(1/shape_W))
Percentil1.Aproximacao_W  = scale_W*(-log(1-0.01))^(1/shape_W)
Percentil5.Aproximacao_W  = scale_W*(-log(1-0.05))^(1/shape_W)
Percentil10.Aproximacao_W = scale_W*(-log(1-0.10))^(1/shape_W)
Percentil50.Aproximacao_W = scale_W*(-log(1-0.50))^(1/shape_W)
Percentil80.Aproximacao_W = scale_W*(-log(1-0.80))^(1/shape_W)

###Kaplan-Meier####
#Teste de aderência p/ Weibull e lognormal - Plot de resíduos aderência

#Ajuste via Kaplan-Meyer
```

```
ajustkm=survfit(Surv(pseudos.tf_L, status)~1)
ajustkm

#Ajuste exponencial
ajust_exp=survreg(Surv(pseudos.tf_L, status)~1,dist="exponential")
summary(ajust_exp)
alpha_exp=exp(ajust_exp$coefficients[1])

#Organizando as estimativas de cada ajuste numa tabela
time = ajustkm$time
stkm<-ajustkm$surv
ste<-exp(-time/alpha_exp)
stw<-exp(-(time/exp(mu_W))^(1/sigma_W))
stln<-pnorm((-log(time)+mu_L)/sigma_L)
stall = as.data.frame(cbind(time,ste, stkm, stw, stln))
stall

#Gráficos para o ajuste
dqqe<-ggplot(stall) +
  geom_point(aes(x=stkm, y=ste),col="red",size=4) +
  geom_abline(slope=1, intercept=0) +
  xlim(c(0, 1)) +
  ylim(c(0, 1)) +
  labs(y="Rw(t): Exponencial",
       x="S(t): Kaplan-Meier",
       title = "")+
  theme_bw()
dqqw<-ggplot(stall) +
  geom_point(aes(x=stkm, y=stw),col="red",size=4) +
  geom_abline(slope=1, intercept=0) +
  xlim(c(0, 1)) +
  ylim(c(0, 1)) +
  labs(y="Rw(t): Weibull",
       x="S(t): Kaplan-Meier",title = "")+
  theme_bw()
```

```
dqqln<-ggplot(stall) +
  geom_point(aes(x=stkm, y=stln),col="red",size=4) +
  geom_abline(slope=1, intercept=0) +
  xlim(c(0, 1)) +
  ylim(c(0, 1)) +
  labs(y="Rw(t): Lognormal",
       x="S(t): Kaplan-Meier",
       title = "")+
  theme_bw()

grid.arrange(dqqe, dqqw, dqqln, ncol=3)
grid.text("Sobrevivência: Kaplan-Meier x Modelos Paramétricos",
x = unit(0.5, "npc"), y = unit(0.98, "npc"),
          gp = gpar(fontsize = 10, fontface = "bold", col = "black"))

#### IC VIA MONTE CARLO ####

#Lognormal(mu = mu_L & sigma = sigma_L) - número de simulações = 10000

MC_l.4500 = MC_l(Lognormal.R4500, status, mu_L, sigma_L, 15, 10000)
MC_l.MTTF = MC_l(Lognormal.MTTF, status, mu_L, sigma_L, 15, 10000)
MC_l.1 = MC_l(Lognormal.Perc1, status, mu_L, sigma_L, 15, 10000)
MC_l.5 = MC_l(Lognormal.Perc5, status, mu_L, sigma_L, 15, 10000)
MC_l.10 = MC_l(Lognormal.Perc10, status, mu_L, sigma_L, 15, 10000)
MC_l.50 = MC_l(Lognormal.Perc50, status, mu_L, sigma_L, 15, 10000)
MC_l.80 = MC_l(Lognormal.Perc80, status, mu_L, sigma_L, 15, 10000)

#IC

MC_l.4500.IC = IC(MC_l.4500)
MC_l.MTTF.IC = IC(MC_l.MTTF)
MC_l.1.IC = IC(MC_l.1)
MC_l.5.IC = IC(MC_l.5)
MC_l.10.IC = IC(MC_l.10)
MC_l.50.IC = IC(MC_l.50)
```

```
MC_l.80.IC = IC(MC_l.80)

#RESULTADOS

MC_l.4500.IC
MC_l.MTTF.IC
MC_l.1.IC
MC_l.5.IC
MC_l.10.IC
MC_l.50.IC
MC_l.80.IC

#amplitude ICs

amplitude(MC_l.4500.IC)
amplitude(MC_l.MTTF.IC)
amplitude(MC_l.1.IC)
amplitude(MC_l.5.IC)
amplitude(MC_l.10.IC)
amplitude(MC_l.50.IC)
amplitude(MC_l.80.IC)


#Weibull (gamma = shape_W & lambda = sacle_W)
# - número de simulações = 10000

MC_w.4500 = MC_W(Weibull.Rt, status, shape_W, scale_W, 15, 10000)
MC_w.MTTF = MC_W(Weibull.MTTF, status, shape_W, scale_W, 15, 10000)
MC_w.1 = MC_W(Weibull.Perc1, status, shape_W, scale_W, 15, 10000)
MC_w.5 = MC_W(Weibull.Perc5, status, shape_W, scale_W, 15, 10000)
MC_w.10 = MC_W(Weibull.Perc10, status, shape_W, scale_W, 15, 10000)
MC_w.50 = MC_W(Weibull.Perc50, status, shape_W, scale_W, 15, 10000)
MC_w.80 = MC_W(Weibull.Perc80, status, shape_W, scale_W, 15, 10000)

#IC
```

```
R.4500.MC_W.IC = IC(MC_w.4500)
MTTF.MC_W.IC = IC(MC_w.MTTF)
MC_W.1.IC = IC(MC_w.1)
MC_W.5.IC = IC(MC_w.5)
MC_W.10.IC = IC(MC_w.10)
MC_W.50.IC = IC(MC_w.50)
MC_W.80.IC = IC(MC_w.80)

#RESULTADO

R.4500.MC_W.IC
MTTF.MC_W.IC
MC_W.1.IC
MC_W.5.IC
MC_W.10.IC
MC_W.50.IC
MC_W.80.IC

#amplitude ICs

amplitude(R.4500.MC_W.IC)
amplitude(MTTF.MC_W.IC)
amplitude(MC_W.1.IC)
amplitude(MC_W.5.IC)
amplitude(MC_W.10.IC)
amplitude(MC_W.50.IC)
amplitude(MC_W.80.IC)
```