



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Carla Cristina Ferreira

O Bilhar Elíptico

Ouro Preto

2023

CARLA CRISTINA FERREIRA

O Bilhar Elíptico

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para obtenção de título de graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP.

Orientador: Geraldo César Gonçalves Ferreira

**Ouro Preto
2023**



FOLHA DE APROVAÇÃO

Carla Cristina Ferreira

O bilhar elíptico

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática

Aprovada em 31 de agosto de 2023

Membros da banca

Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Frederico da Silva Reis - Universidade Federal de Ouro Preto
Me. Gilberto de Oliveira Santanta - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Sebastião Martins Xavier - Universidade Federal de Ouro Preto

Geraldo César Gonçalves Ferreira, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 07/11/2023



Documento assinado eletronicamente por **Geraldo Cesar Goncalves Ferreira, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 07/11/2023, às 11:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0573584** e o código CRC **EB9A197A**.

DEDICATÓRIA: Dedico este trabalho aos meus pais Cristovão e Cleyde, que sempre me incentivaram e apoiaram. Espero que estejam orgulhosos! Dedico ao meu namorado, Thiago, e a minha irmã, Lílian, parceiros de todas horas. Dedico aos meus amigos, por compartilharem comigo, horas de estudo, incentivos, risadas e por me apoiarem nos momentos difíceis. Ao meu orientador, Geraldo Cesar Gonçalves Ferreira, por toda paciência, incentivo e disponibilidade.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus.

Agradeço aos meus pais por todo incentivo e paciência. Sou imensamente grata por toda dedicação que tiveram para que eu me formasse e por sempre apoiarem as minhas escolhas. Agradeço sempre por tê-los em minha vida. Essa conquista é nossa!

Agradeço ao meu namorado, Thiago, por ser a minha fuga de toda rotina e estresse. Meu companheiro que, mesmo de longe, esteve sempre presente, me apoiando, incentivando e acreditando em mim, até quando eu mesma não acreditava.

Agradeço a minha irmã, Lílian, por ser a minha parceira. Está sempre do meu lado, independente de qualquer coisa. Faz questão de ser presente e, mesmo que da sua maneira, participa de cada passo da minha vida.

Agradeço aos meus amigos da UFOP, Amanda, Ana Júlia, Henrique, Mariana, Rhilary e Thais, sem vocês, toda a graduação teria sido mais difícil e nem sei se permaneceria no curso. Obrigada pelas horas de estudo, sessões de desabafo e brincadeiras.

Agradeço, também, aos professores do curso de Matemática, pelos ensinamentos e inspirações. Em especial, o professor Eder, por todo incentivo.

E, por fim, agradeço ao meu orientador, Geraldo, que me acompanha desde o início da graduação. Sempre paciente com as minhas preocupações e ansiedades. Obrigada por todos os conselhos e por compartilhar comigo tantos ensinamentos.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é estudar a dinâmica do Bilhar Elíptico. Está dividido em cinco capítulos. O primeiro capítulo abordará o contexto histórico do bilhar. No segundo capítulo, discutiremos sistemas dinâmicos. Em seguida, no terceiro capítulo, caracterizaremos a elipse e nos aprofundaremos em suas propriedades e aplicações. No quarto capítulo, faremos um estudo do bilhar elíptico e exploraremos como as propriedades das elipses influenciam sua dinâmica. Por fim, no quinto capítulo, apresentaremos uma atividade exploratória envolvendo o Princípio da Reflexão Elíptica utilizando material manipulável e software de matemática dinâmica.

Palavras-chave: Bilhares, Sistema Dinâmico, Princípio da Reflexão das Elipses, Bilhar Elíptico, GeoGebra.

Abstract

The main objective of this work is to study the dynamics of Elliptical Billiards. It is divided into five chapters. The first chapter will address the historical context of billiards. In the second chapter, we will discuss dynamical systems. Then, in the third chapter, we will characterize the ellipse and delve deeper into its properties and applications. In the fourth chapter, we will study elliptical billiards and explore how the properties of ellipses influence their dynamics. Finally, in the fifth chapter, we will present an exploratory activity involving the Principle of Elliptic Reflection using manipulable material and dynamic mathematics software.

Keywords: Billiards, Dynamic System, Elliptical Reflection Principle, Elliptical Billiard, GeoGebra.

Conteúdo

1	Introdução	11
2	Sistema Dinâmico Unidimensional	13
2.1	Órbitas	13
2.2	Pontos Fixos e Pontos Periódicos	14
2.3	Tipos de Órbitas	15
2.4	Análise Gráfica	16
3	A Elipse e suas propriedades	19
3.1	A Elipse	19
3.2	Construção do Jardineiro	21
3.3	Princípio de Reflexão das Elipses	22
3.3.1	Reta Tangente a uma Elipse	23
3.3.2	Princípio de Reflexão da Elipse	25
3.3.3	Reta normal a elipse em um ponto	30
4	O Bilhar Elíptico	32
4.1	Bilhar Elíptico	33
4.1.1	As reflexões não intersectam os focos F_1 e F_2	33
4.1.2	A bola passa sobre um dos focos	43
5	Explorando o Princípio de Reflexão das Elipses	48
5.0.1	Construção da Mesa de Bilhar Elíptico	48
5.0.2	Aplicação da atividade	50
6	Conclusão	51
	Referências Bibliográficas	52

Lista de Figuras

1.1	Bilhar original.	11
1.2	Bola de bilhar em marfim	12
2.1	Pontos fixos de $f(x)$	14
2.2	Análise gráfica da órbita de x_0 quando iterada usando a função f	17
2.3	Análise gráfica da órbita de x_0 quando iteramos a função $f(x) = \cos(x)$	17
2.4	Análise gráfica da órbita de x_0 quando iteramos a função $f(x) = x + 3$	18
3.1	Elipse obtida a partir da seção cônica	19
3.2	Elipse: seus focos, eixos e origem	20
3.3	Canteiro elíptico construído a partir do Método do Jardineiro	21
3.4	Elipse gerada a partir da construção do jardineiro com focos F e F'	22
3.5	Galeria de sussurros	22
3.6	Elipse ε tangenciada pela reta r em P	24
3.7	Princípio de Reflexão das Elipses	25
3.8	Reta Tangente perpendicular ao eixo maior	26
3.9	Reta tangente paralela ao eixo maior, no ponto B_1	27
3.10	Caso 1 do Princípio de Reflexão das Elipses	28
3.11	Caso 2 do Princípio de Reflexão das Elipses	29
3.12	Princípio de Reflexão das Elipses	31
4.1	Bissetriz de $\widehat{P_0P_2P_2}$ e de $\widehat{F_1P_1F_2}$	33
4.2	O ângulo que $\overline{P_0P_1}$ faz com a bissetriz interna de $P_0P_1P_2$ é congruente ao ângulo que $\overline{P_1P_2}$ faz com a mesma bissetriz	34
4.3	Ângulos $\widehat{P_0P_1F_1}$ e $\widehat{F_2P_1P_2}$	34
4.4	$\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_1P_2}$ intersectam $\overline{F_1F_2}$ - As bissetrizes de $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ coincidem	36
4.5	$\overline{P_0P_1}$ intersecta $\overline{F_1F_2}$ e $\overline{P_1P_2}$ não intersecta - Aqui as bissetrizes de $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ não podem coincidir Fonte: Acervo da autora	36
4.6	$\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}$ e $\overline{P_2P_3}$ não intersectam $\overline{F_1F_2}$ - Aqui as bissetrizes de $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ coincidem, assim como as bissetrizes de $\widehat{P_1P_2P_3}$ e $\widehat{F_1P_2F_2}$. Fonte: Acervo da autora	37
4.7	$\overline{P_0P_1}$ não intersecta $\overline{F_1F_2}$ e $\overline{P_1P_2}$ intersecta - As Bissetrizes de $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ não podem coincidir.	37
4.8	Bola passando fora de $\overline{F_1F_2}$. Sua trajetória gera uma cáustica com um formato de uma elipse confocal à elipse original. Fonte: Elliptic Billiard Table. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/auXe6ZGk	38
4.9	Bilhar elíptico: bola passando pelo segmento que une os focos Fonte: Acervo da autora	38
4.10	Elipse com focos F_1 e F_2 tangente a $\overline{P_0P_1}$ no ponto Q Fonte: Acervo da autora	39

4.11 Elipse com focos F_1 e F_2 tangente a $\overline{P_1P_2}$ no ponto R Fonte: Acervo da autora	39
4.12 A cáustica gerada é uma elipse confocal a elipse original Fonte: Acervo da autora	40
4.13 Bilhar elíptico: Bola passando nos vértices Fonte: Acervo da autora	40
4.14 Bola passando pelo segmento que une os focos gerando nova cáustica com formato de uma hipérbole Fonte: Elliptic Billiard Table. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/auXe6ZGk	41
4.15 Bilhar elíptico: Bola passando nos vértices Fonte: Acervo da autora	42
4.16 Hipérbole de focos F_1 e F_2 tangenciada pelo ponto Q Fonte: Acervo da autora	42
4.17 Hipérbole de focos F_1 e F_2 tangenciada pelo ponto R Fonte: Acervo da autora	43
4.18 A trajetória do bilhar gera cáustica com o formato de uma hipérbole confocal a elipse Fonte: Acervo da autora	44
4.19 Bilhar elíptico: bola passando pelos focos F_1 e F_2 Fonte: Elliptic Billiard Table. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/auXe6ZGk	45
4.20 Bilhar elíptico: posição inicial da bola no eixo maior -imagem retirada de [7] . . .	45
4.21 Trajetória que converge para o eixo maior da elipse	46
4.22 Trajetória que converge para o eixo maior da elipse Fonte: Acervo da autora	47
5.1 Processo de esticar a corda e marcar o material para a construção da curva . . .	49
5.2 Elipse construída pelo método do jardineiro	49
5.3 Mesa de bilhar finalizada	49

1 Introdução

De acordo com o texto "A origem do Bilhar"[5], o bilhar teve início por volta do século XV no norte da Europa, como um tipo de variação do jogo criquet. Assim, o bilhar original era jogado em uma mesa com seis buracos, com um aro de criquet, um taco reto e bolas de marfim empurradas e não golpeadas como hoje. O pano verde é a representação dos gramados. Com o tempo, os aros foram extintos do jogo e, por volta do século XVI as pessoas passaram a golpear a bola com a ponta do taco.

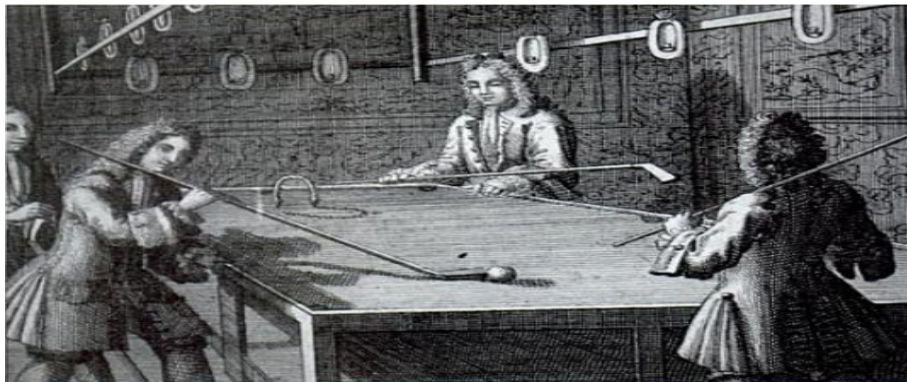


Figura 1.1: Bilhar original.

Fonte: The Billiards Guy . Disponível em:

<https://thebilliardsguy.com/what-parts-are-made-in-a-cue-stick/billiards-mace>

A palavra "bilhar" é derivada do Francês "billiard" (mesa) ou de "bille" (bola). Já a palavra "sinuca", comumente utilizada no Brasil, é derivada do termo "snooker", uma das variações do jogo de bilhar. Inicialmente considerado jogo dos nobres, foi ficando cada vez mais popular pelo mundo inteiro, possibilitando o surgimento de muitas modalidades. Em 1927, no Reino Unido, o bilhar foi o primeiro esporte a ter um campeonato mundial.

O material utilizado para a fabricação da bola do bilhar foi uma grande questão. Originalmente, a bola era feita de marfim, figura 1.2, recurso de origem animal limitado. Por causa da popularização do jogo, no século XIX, e novas variações do jogo que necessitavam de mais bolas, o abastecimento de marfim chegou a momentos críticos. Entre 1850 e 1900, a matança de elefantes alcançou o número de 10000 a cada ano. Porém, como o marfim era um material caro e apresentava alguns problemas em relação a regularidade no formato da bola, iniciou-se uma incessante busca por um substituto. Foi oferecido até o prêmio de US\$ 10000 para quem o encontrasse. A origem das bolas da atualidade, remonta pouco antes da Segunda Guerra Mundial e a fórmula era considerada segredo militar pela Alemanha. Atualmente, as bolas são feitas de celulóide e de outros plásticos da nova era.



Figura 1.2: Bola de bilhar em marfim

Fonte: Levy Leiloeiro . Disponível em: <https://www.levyleiloeiro.com.br/peca.asp?ID=34396>

Atualmente, é um dos jogos mais populares no Brasil. Por isso, ao falar sobre bilhar, logo vem a nossa mente a mesa de sinuca. Mas para compreender melhor o tema tratado nesse trabalho, é necessário que você abstraia um pouco e tente imaginar esse bilhar de uma forma diferente. Inicialmente, exclua da sua mente todas as bolas da mesa de sinuca e deixe sobre ela apenas a bola branca. Agora, imagine esse mesa com um formato diferente, uma curva, mais especificamente. E além disso, imagine essa mesa sem atrito, de maneira que, a partir do primeiro movimento da bola, ela bata nas extremidades da mesa infinitas vezes.

Faremos agora o estudo de um sistema dinâmico, o bilhar elíptico. Nele, a função da trajetória da bola é iterada n vezes, ou seja, a bola bate no bordo da mesa n vezes. Assim faremos estudo da dinâmica do bilhar, analisando a trajetória da bola e sua relação com as propriedades da elipse. E, ao fim do trabalho, construiremos o nosso bilhar.

2 Sistema Dinâmico Unidimensional

Seja X um espaço métrico. A aplicação $f : X \rightarrow X$ define um sistema dinâmico.

Dado um ponto $x \in X$, podemos aplicar f a este ponto obtendo um novo ponto $f(x) \in X$. Dessa forma, definimos recursivamente $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sendo $f^0 = Id$.

Exemplo 1. $f(x) = x^2$ no ponto $x = 2$:

n	1	2	3
f^n	4	16	256

Iterar uma função inúmeras vezes é tentar entender o comportamento limite das órbitas geradas ao fazermos essas iterações.

2.1 Órbitas

Definição 1. Seja $x_0 \in X$. Definimos a órbita de x_0 por f como o conjunto $O_f(x_0)$ formado pelos elementos resultantes de todas as iterações de x_0 pela função f , ou seja,

$$O_f = \{f^0(x_0), f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$$

Exemplo 2. Seja a função $f(x) = x^2$ e $x_0 = \frac{1}{2}$ temos que:

$$\begin{aligned} f^0\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \\ f^1\left(\frac{1}{2}\right) &= f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{4} \\ f^2\left(\frac{1}{2}\right) &= f\left(f^2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{16} \\ f^3\left(\frac{1}{2}\right) &= f\left(f^3\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{256} \\ f^4\left(\frac{1}{2}\right) &= f\left(f^4\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{65536} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$O_f\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{256}, \frac{1}{65536}, \dots \right\}$$

2.2 Pontos Fixos e Pontos Periódicos

Definição 2. Dizemos que um ponto $x \in X$ é um ponto fixo de $f : X \rightarrow X$ se $f(x) = x$,

Note que neste caso vale $f^n(x) = x$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Além disso, geometricamente, são os pontos da função que interceptam a reta $y = x$.

Exemplo 3. Seja $f(x) = x^2$, fazendo o procedimento acima, temos que

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x^2 = x \\ &\iff x^2 - x = 0 \\ &\iff x(x - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

Na figura 3 podemos ver como esses pontos são representados graficamente:

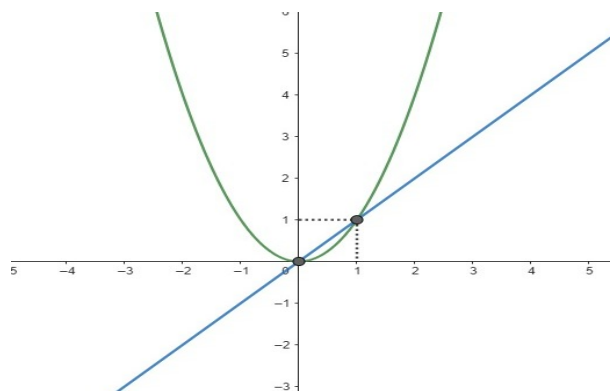


Figura 2.1: Pontos fixos de $f(x)$

Fonte: autora

Perceba que a reta $y = x$ intercepta o gráfico da função f nos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$.

Definição 3. Se $x \in X$ é um ponto fixo de f^n para algum $n \in \mathbf{N}$ mas não for um ponto fixo de f para todo $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, dizemos que x é um ponto periódico de período n , ou seja,

$$\begin{aligned} f^n(x_0) &= (x_0) \\ f^i(x_0) &\neq x_0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, \dots, n-1\} \end{aligned}$$

Uma vez que a órbita apresenta um ponto fixo, sabemos que possui ponto periódico.

Quando um ponto é periódico de período n a sua órbita se repete a cada n iterações.

Exemplo 4. Seja $f(x) = x^2 - 1$. Os pontos 1 e 0 são pontos periódicos de período 2, uma vez que

$$f(0) = 0^2 - 1 = -1$$

Ao iterar essa função mais uma vez, ou seja, aplicar f a esse resultado, teremos

$$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$$

Se repetirmos esse processo, perceberemos que já obtivemos esse resultado. Ou seja, a órbita de todas as iterações de f será:

$$O_f(x) = \{-1, 0, -1, 0, \dots\}$$

2.3 Tipos de Órbitas

Existem vários tipos de órbitas e são muitas as suas classificações. Uma maneira de classificá-las é quanto ao tipo de ponto presente em seus ciclos, que apresentam alguns resultados e definições:

Definição 4. A Órbita de um ponto fixo é um conjunto unitário cujo elemento é o ponto fixo em questão.

Exemplo 5. Vimos que os pontos 0 e 1 são pontos fixos da função $f(x) = x^2$. Note que, ao iterarmos essa função nesses pontos teremos sempre os mesmos resultados, sua órbita contém somente esse ponto:

Para $x = 1$:

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$f^2(1) = f(f(1)) = f(1) = 1$$

$$f^3(1) = f(f^2(1)) = f(1) = 1$$

$$\vdots$$

$$f^n(1) = 1$$

$$\text{Logo, } O_f(1) = \{1\}$$

Para $x = 0$ o procedimento é análogo, obtendo como resultado que $O_f(0) = \{0\}$

Definição 5. Um ponto x_0 é dito eventualmente fixo se x_0 não é um ponto fixo, mas algum ponto da órbita de x_0 é ponto fixo.

Exemplo 6. O ponto $x = -1$, por exemplo, não é fixo em $f(x) = x^2$, pois, como vimos anteriormente, 1 e 0 são os pontos fixos dessa função. Mas ao iterarmos f temos que $f^n(-1) = 1$. Logo, $O_f(-1) = \{1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$. Note que, assim que a órbita "atingiu" esse ponto, obteve um ciclo que se manteve só nele.

Definição 6. Um ponto x_0 é dito eventualmente periódico se x_0 não é um ponto periódico, mas algum ponto da órbita de x_0 é periódico.

Exemplo 7. Na função $f(x) = x^2 - 1$, em $x_0 = 1$ temos

$$O_f(x_0) = \{1, 0, -1, 0, -1, \dots\}$$

Repare que 1 não é um ponto periódico mas os pontos -1 e 0 são.

2.4 Análise Gráfica

Nesta sessão trataremos sobre análises gráficas que será uma importante ferramenta para o estudo das órbitas. Utilizando esse procedimento, conseguimos estudar as órbitas a partir do gráfico de uma função.

Para representar graficamente a órbita de uma função f , deve-se considerar a reta $y = x$ sobreposta no gráfico da função. Como vimos anteriormente, os pontos da interseção dessa reta com o gráfico de f são os pontos fixos.

Para encontrar a órbita de x_0 , iniciamos no ponto (x_0, x_0) , pertencente a reta diagonal $y = x$. Traçamos então uma linha vertical partindo desse ponto até atingir f , ou seja, até o ponto $P_1 = (x_0, f(x_0))$. Em seguida, traçamos uma linha horizontal do ponto P_1 até a diagonal, atingindo o ponto $(f(x_0), f(x_0))$. Então, partindo desse ponto, traçamos mais um linha vertical atingindo f no ponto $P_2 = (f(x_0), f^2(x_0))$. E, novamente, traçamos uma linha horizontal de P_2 até a reta diagonal no ponto $(f^2(x_0), f^2(x_0))$. A figura 2.2 ilustra este processo.

Continuando o processo de desenhar uma linha vertical atingindo f e uma linha horizontal, atingindo a diagonal, teremos como resultado o gráfico da órbita de x_0 .

Abaixo veremos alguns exemplos de gráficos de órbitas. Para ilustrá-los, utilizamos como recurso a construção do GeoGebra "Cobweb plotter" [2], feita pela University of Melbourne School of Mathematics and Statistics. Esta aplicação é uma ferramenta muito prática para obtermos os gráficos, já que basta inserirmos a função e o ponto no qual desejamos iterá-la. Em seguida basta clicar no botão "interate" quantas vezes desejarmos e teremos o gráfico resultante de todas as interações nesse ponto.

Exemplo 8. Na figura 2.3 podemos ver o gráfico de órbita de $f(x) = \cos(x)$ no ponto $(x_0) = 0$.

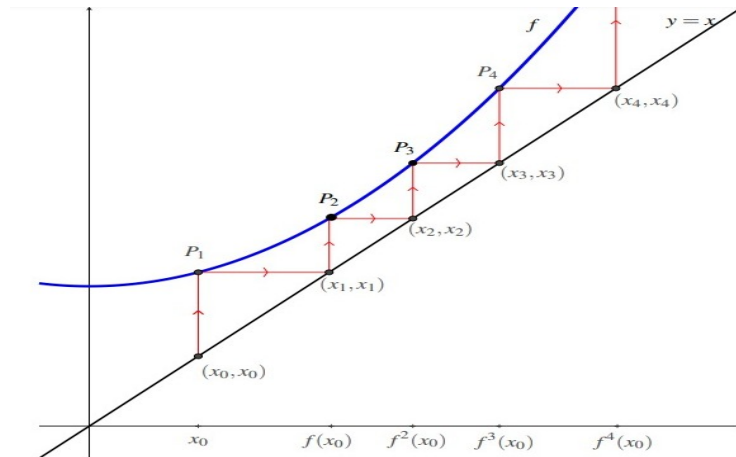


Figura 2.2: Análise gráfica da órbita de x_0 quando iterada usando a função f
 Fonte: O Teorema de Sarkorvskii e seu Recíproco

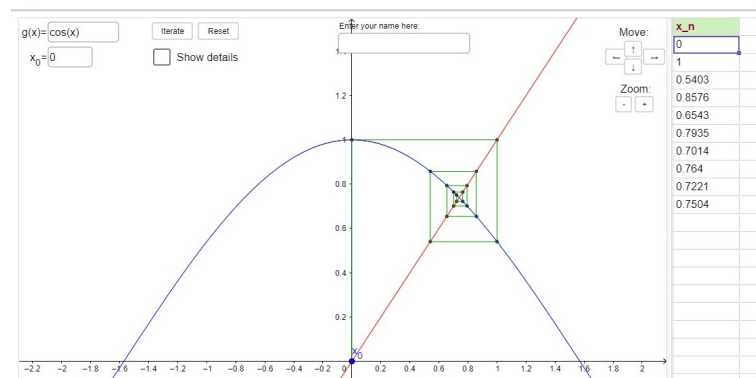


Figura 2.3: Análise gráfica da órbita de x_0 quando iteramos a função $f(x) = \cos(x)$
 Fonte: Geogebra, Cobweb plotter . Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/QJ79IWCL>

Repare que as linhas traçadas lembram uma teia de aranha, por isso, gráficos desse tipo também são chamados de "gráficos de teia".

Exemplo 9. Na figura 2.4 podemos ver o gráfico de órbita de $f(x) = x + 3$ no ponto $(x_0) = 0$. Neste caso, as linhas lembram uma escada, por isso, gráficos desse tipo também são chamados de "gráficos de escada".

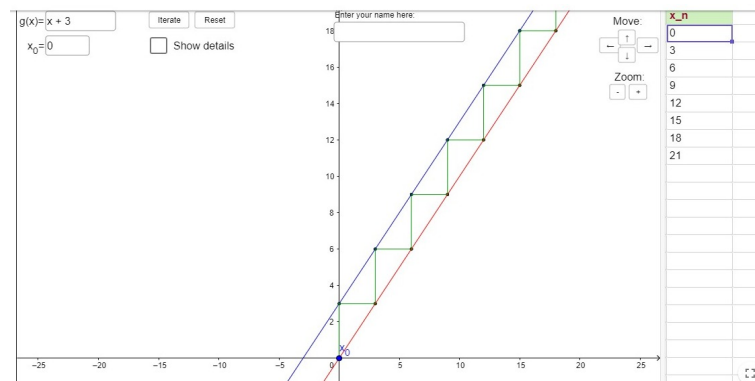


Figura 2.4: Análise gráfica da órbita de x_0 quando iteramos a função $f(x) = x + 3$
 Fonte: GeoGebra, Cobweb plotter . Disponível em:
<https://www.geogebra.org/m/QJ79IWCL>

3 A Elipse e suas propriedades

Neste capítulo apresentaremos a elipse, evidenciando algumas de suas propriedades que possibilitarão o estudo do bilhar elíptico, o principal objeto de estudo deste trabalho. Trataremos aqui, sobre algumas das aplicações das propriedades elípticas, as quais estão presentes em alguns elementos do nosso cotidiano. Ao final desta seção, teremos ferramentas para a construção do bilhar elíptico. Para os estudos deste capítulo utilizamos como referência o trabalho, de Cristian Reis da Luz, "Bilhares em curvas constituídas por arcos elípticos"[6].

3.1 A Elipse

Na geometria, cônicas ou seções cônicas são curvas obtidas pela intersecção de um plano com um cone duplo. A seção transversal de um cone por um plano gera, na intersecção entre o cone e o plano, uma elipse. Logo, a elipse é uma seção cônica.

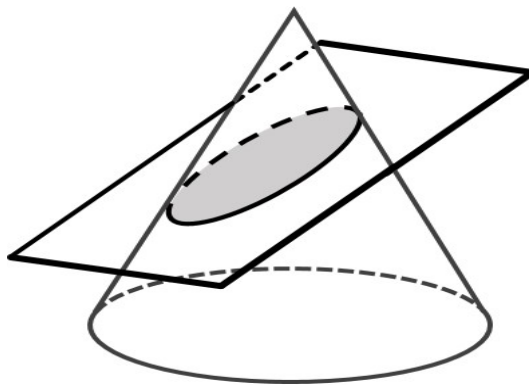


Figura 3.1: Elipse obtida a partir da seção cônica

Fonte: Pense Matemática

Disponível em:

<https://pensevestibular.com.br/topicosdematematica/geometria-analitica/conicas-elipse>

Outra forma de obtermos uma elipse é a partir da seguinte definição:

Definição 7. Fixados F_1 e F_2 , o conjunto dos pontos P , tais que

$$\text{dist}(F_1, F_2) = 2c \text{ e}$$

$$\text{dist}(PF_1) + \text{dist}(PF_2) = 2a$$

em que $a > c$, é denominado elipse.

Definiremos agora, alguns elementos da elipse.

Definição 8. Para ilustrar os seguintes elementos, utilizaremos a figura 3.2:

1. Os segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ são os eixos da elipse. De acordo com o seu tamanho, são classificados como "eixo maior" e "eixo menor". Na figura anterior o eixo maior é o segmento $\overline{A_1A_2}$ e o eixo menor é o segmento $\overline{B_1B_2}$.
2. O centro da elipse é representado pelo ponto O . Perceba que a origem é o ponto médio dos eixos.
3. Já os pontos F_1 e F_2 são os focos.
4. Os pontos A_1 e A_2 são as extremidades do eixo horizontal, enquanto os pontos B_1 e B_2 são extremidades do eixo vertical da elipse. Também chamamos esses pontos de vértices da elipse.
5. $\overline{F_1F_2}$ é a distância focal e tem comprimento $2c$.
6. $\overline{A_1A_2}$ tem tamanho $2a$.
7. $\overline{B_1B_2}$ tem tamanho $2b$.
8. O número $e = \frac{c}{a}$ é a excentricidade da elipse, que varia entre $0 < e < 1$.

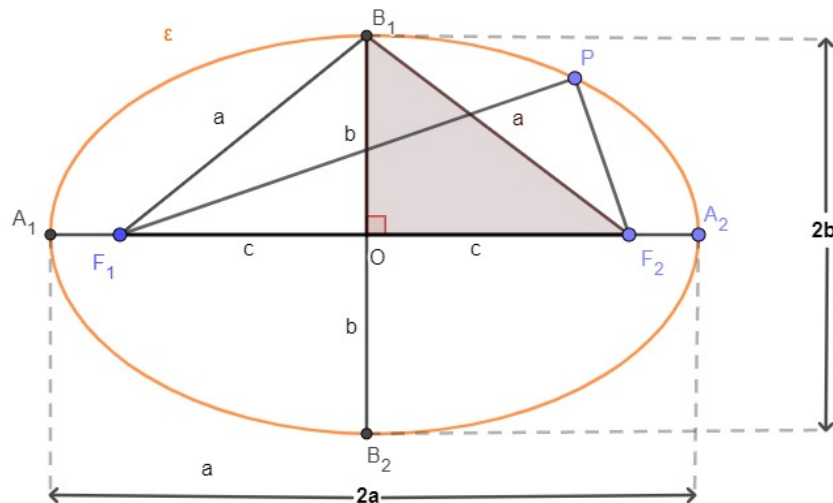


Figura 3.2: Elipse: seus focos, eixos e origem
Fonte: Acervo da autora

Note, na figura 3.2, que o triângulo formado pelos semieixos a e b é um triângulo retângulo. Logo, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Seja um ponto P , de coordenadas (x,y) , presente na curva da elipse, como na figura 3.2, podemos estabelecer uma equação reduzida. Para isso, é necessário que nos atentemos a identificar qual é o eixo maior:

- Se o eixo maior for localizado horizontalmente no plano cartesiano, ou seja, for o seguimento $\overline{A_1A_2}$, como na figura , a equação reduzida da elipse será dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Se o eixo maior for estiver verticalmente no plano cartesiano, ou seja, for o seguimento $\overline{B_1B_2}$, a equação reduzida será dada por

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Encontramos mais sobre este assunto em [6] e [4].

3.2 Construção do Jardineiro

Além da seção cônica, outra maneira de obter a elipse é a partir da Construção do Jardineiro. É um método bem conhecido e é nomeado desta forma por ser utilizado na construção de canteiros elípticos. Esse método consiste em afixar duas hastes verticais no chão e a cada uma delas prender a extremidade de uma corda com comprimento superior à distância das duas hastes de maneira que, ao esticar a corda, seja traçada uma elipse.

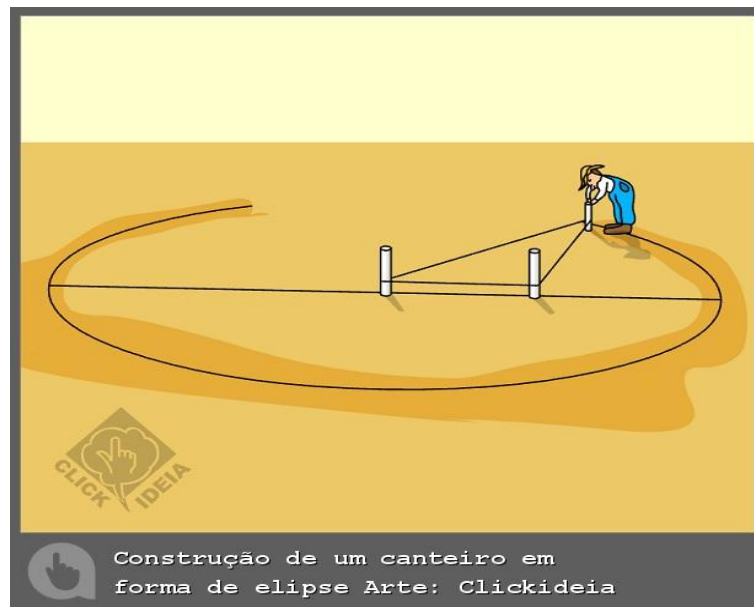


Figura 3.3: Canteiro elíptico construído a partir do Método do Jardineiro

Fonte: Clickideia.

Disponível em: <http://www.clickideia.com.br/portal/conteudos/c/34/17131>

Perceba que a construção do Jardineiro obedece a definição 7 . As hastes fixadas correspondem aos focos, a distância entre as hastes é sempre a mesma, $2c$, e o tamanho da corda é constante, $2a$.

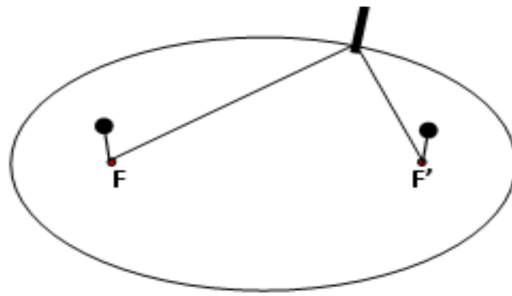


Figura 3.4: Elipse gerada a partir da construção do jardineiro com focos F e F'

Fonte: Site Gi^2 .

Disponível em: <https://www.gi2.pt/galerias/elipses/>

3.3 Princípio de Reflexão das Elipses

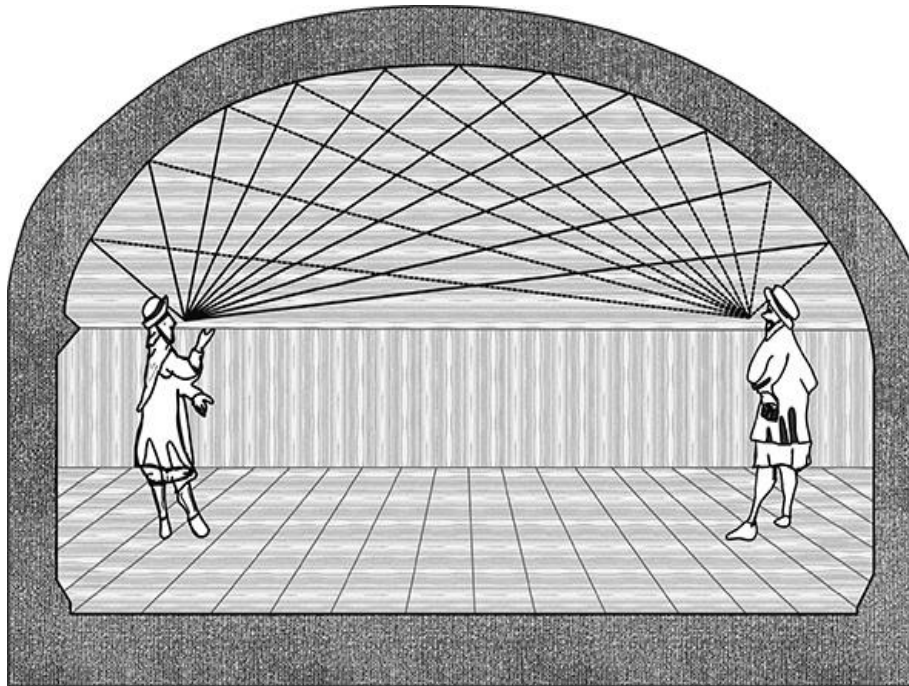


Figura 3.5: Galeria de sussurros

Fonte: Derivando a Matemática

Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br>

Segundo Pierre Baudry [10], John Quincy Adams, sexto presidente dos Estados Unidos, enquanto servia na Câmara dos Deputados, teria solicitado que sua mesa fosse colocada no local correspondente a um dos focos da elipse, para ter a oportunidade de ouvir com nitidez as conversas privadas que se desenrolavam entre os que conversavam inadvertidamente em pé nos outros focos. Hoje, ambientes com essa mesma propriedade são chamados de galerias de sussurros, como, por exemplo, a Catedral de Brasília e o Aeroporto de Santos Dumond no Rio de

Janeiro. A "magia" dessas galerias é que, se uma pessoa situada em um ponto específico sus-surra algo, outra pessoa, também posicionada em um ponto específico, pode ouvi-la, mesmo que outras pessoas não consigam. Esses pontos são os focos e a propriedade refletora das elipses é o que torna tudo isso possível.

Também podemos ver aplicações dessa propriedade na área da saúde. Na Odontologia, por exemplo, as luminárias com espelhos elípticos têm a capacidade de concentrar os raios luminosos em um ponto que é ajustado pelo dentista para iluminar o dente que está sendo tratado. Já na Medicina, podemos ver a aplicação dessa propriedade na Litotripsia, um tratamento para pedras nos rins. É um procedimento não invasivo, em que um refletor com seção elíptica é posicionado de maneira que a pedra nos rins esteja em um dos focos, assim, ondas sonoras de alta intensidade fragmentam a pedra e esses fragmentos são posteriormente eliminados pelo organismo do paciente. Para mais curiosidades sobre aplicações dessa propriedade recomendamos a leitura de [9] e [10].

A importância do Princípio de Reflexão das elipses vai além das aplicações citadas anteriormente e será muito importante para o estudo do bilhar elíptico. Antes de tratarmos sobre esse assunto, será necessário falarmos da reta tangente a uma elipse.

3.3.1 Reta Tangente a uma Elipse

Para seguir nossos estudos precisaremos da seguinte proposição:

Proposição 1. Dizemos que uma reta r é tangente a uma elipse ε num ponto $P \in \varepsilon$ se r intersecta ε somente nesse ponto, ou seja, $r \cap \varepsilon = \{P\}$. A equação da reta tangente à elipse $\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ em $P = (x_0, y_0) \in \varepsilon$ é $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Demonstração. Consideraremos que a equação da reta tangente r_t dada por $y - y_0 = m_t(x - x_0)$, onde $(x_0, y_0) \in r_t$ e m_t é a inclinação desta reta tangente.

Sabemos que, ao derivar a equação da elipse no ponto $P(x_0, y_0)$, encontraremos o coeficiente angular m_t da reta tangente. Então, calculando $m_t = \frac{dy}{dx}$, por derivação implícita, temos:

$$\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ logo}$$

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-xb^2}{ya}$$

Avaliando em $P = (x_0, y_0)$,

$$m_t = -\frac{b^2 x_0}{y_0 a^2}$$

Então, podemos substituí-lo na equação da reta

$$y - y_0 = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2} (x - x_0)$$

Agora podemos reorganizar essa equação. Para isso, basta multiplicar a igualdade por $y_0 a^2$.

$$y y_0 a^2 - a^2 y_0^2 = -x_0 x b^2 + x_0^2 b^2$$

$$y y_0 a^2 + x_0 x b^2 = x_0^2 b^2 + y_0^2 a^2$$

Perceba que $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, então $a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 = a^2 b^2$. Logo, podemos reescrever a equação anterior:

$$a^2 y y_0 + b^2 x x_0 = a^2 b^2$$

Finalmente, dividindo a expressão por $a^2 b^2$, temos:

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

Agora, temos que provar que, de fato, P é o único ponto de interseção entre a reta tangente e a elipse. Utilizaremos a figura 3.6 para ilustrar nossa prova.

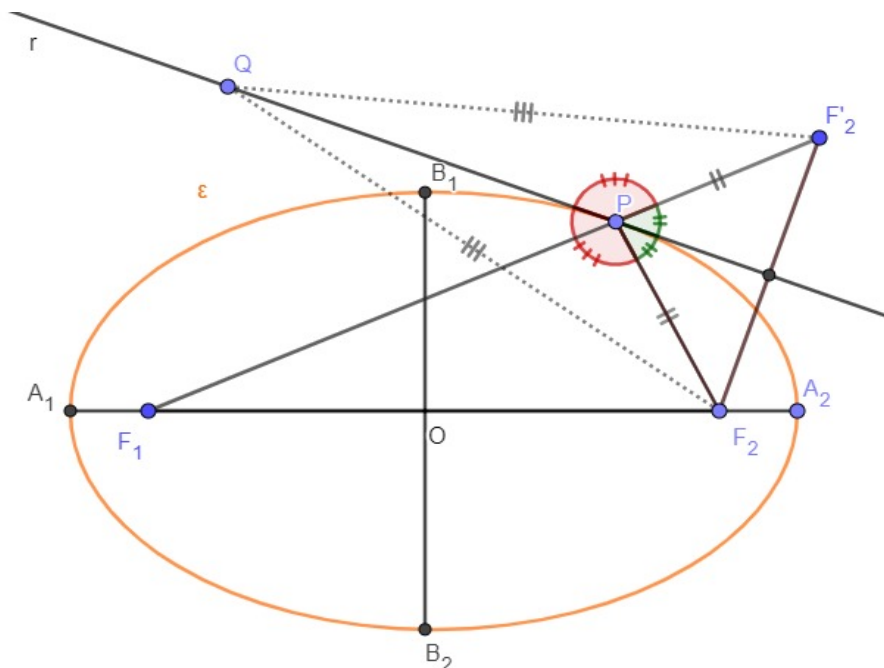


Figura 3.6: Elipse ϵ tangenciada pela reta r em P

Fonte: Acervo da autora

Seja r a bissetriz interna do ângulo $F_2 P F_2'$ e fazendo-se $P F_2 = P F_2'$, como o triângulo $F_2 P F_2'$ é isósceles, obtemos que:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$PF_1 + PF'_2 = 2a$$

Vamos considerar, por absurdo, que um ponto $Q \neq P$ pertence à reta r tangente à elipse ϵ . Como $\triangle QPF_2 = \triangle QPF'_2$ (caso LAL), Obtemos que

$$QF_2 = QF'_2.$$

Pela desigualdade triangular, a soma da medida de dois lados do triângulo é sempre maior que a medida do terceiro. Então, no $\triangle QF_1F'_2$, temos:

$$QF_1 + QF'_2 > F_1F'_2 = 2a$$

Mas, por construção, $QF_2 = QF'_2$. Assim, temos que

$$QF_1 + QF_2 > 2a$$

Disso podemos afirmar que Q não pertence à elipse ϵ , então P é o único ponto de r pertencente à elipse, ou seja, $r \cap \epsilon = \{P\}$. Logo, P é o **ponto de tangência** da reta r com ϵ .

□

3.3.2 Princípio de Reflexão da Elipse

Finalmente, falaremos de uma das propriedades mais espetaculares da elipse. Para o seu estudo iniciaremos com a seguinte proposição:

Proposição 2. *Seja P um ponto da elipse ϵ de focos F_1 e F_2 . Os segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ formam ângulos congruentes com a reta tangente a ϵ em P .*

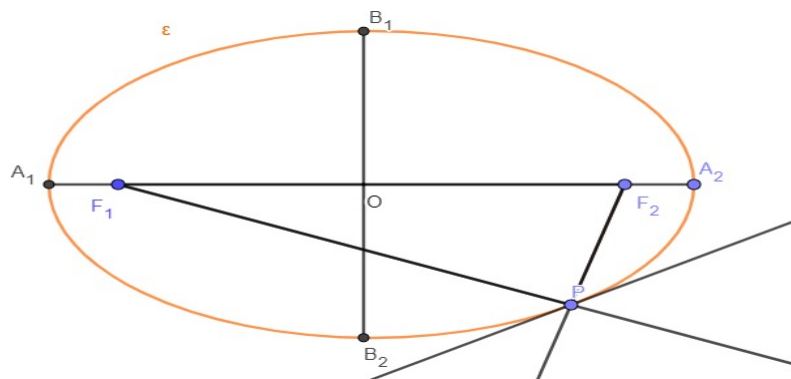


Figura 3.7: Princípio de Reflexão das Elipses
Fonte: Acervo da autora

Demonstração. Para a nossa demonstração, consideraremos a elipse ϵ de centro na origem $O(0,0)$ e vértices nos eixos OX e OY , mas a demonstração é análoga para a elipse transladada e/ou rotacionada em relação aos eixos coordenados.

Seja, α o ângulo entre a reta tangente em P e o segmento PF_1 e o foco F_1 e β ângulo entre a reta tangente em P e o segmento PF_2 e o foco F_2 . Perceba que para alguns pontos triviais, a proposição é imediata:

- Nos pontos $P = A_1(-a,0)$ e $P = A_2(a,0)$ a reta tangente é perpendicular ao eixo maior, assim temos que $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$.

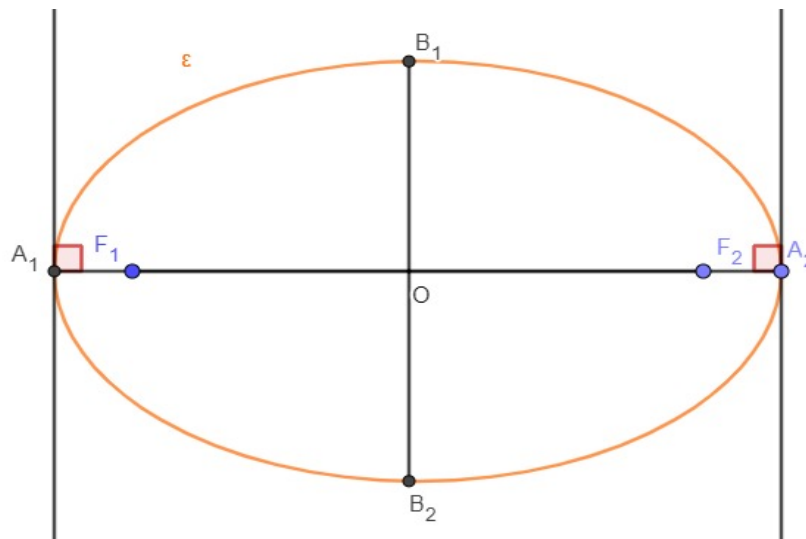


Figura 3.8: Reta Tangente perpendicular ao eixo maior
Fonte: Acervo da autora

- Nos pontos $P = B_1(0,b)$ e $P = B_2(0,-b)$ o triângulo F_1PF_2 é isósceles de base F_1F_2 , sendo $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$.
Perceba na figura 4.8 que o triângulo $F_1B_1F_2$ é isósceles, logo $\alpha = \beta$. Além disso, note que $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}$.

Para os pontos não triviais dividiremos em dois casos:

Caso 1: $x_0 \neq c, x_0 \neq -c$

Considere a reta t que passa pelos pontos $P(x_0, y_0)$ e $F_1(-c,0)$. Repare que α_t é sua inclinação. Temos então que seu coeficiente angular é dado por

$$m_t = \frac{y_0}{x_0 + c}$$

Agora considere a reta r que é tangente à elipse no ponto P , sua inclinação é m_r . Pela proposição 1 seu coeficiente angular obtido é:

$$m_r = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

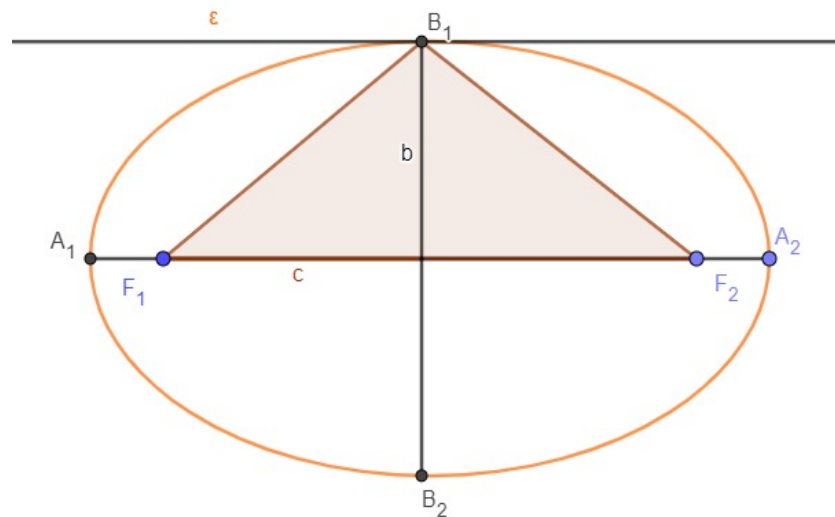


Figura 3.9: Reta tangente paralela ao eixo maior, no ponto B_1
 Fonte: Acervo da autora

Na figura 3.10 observamos que $\pi - \alpha = \alpha_r - \alpha_t$, ou seja, $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha_r - \alpha_t)$, isto é, $\alpha = \pi + \alpha_r - \alpha_t$, ou seja, $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha_r - \alpha_t)$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha_r - \alpha_t) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_t}{1 + \operatorname{tg} \alpha_r \operatorname{tg} \alpha_t} \\ &= \frac{\frac{-b^2 x_0}{a^2 y_0} - \frac{y_0}{x_0 + c}}{1 + \left(\frac{-b^2 x_0}{a^2 y_0}\right) \left(\frac{y_0}{x_0 + c}\right)} \\ &= \left[\frac{-b^2 x_0^2 - c b^2 x_0 - a^2 y_0^2}{a^2 y_0 (x_0 + c)} \right] \left[\frac{a^2 (x_0 + c)}{a^2 (x_0 + c) - b^2 x_0} \right] \end{aligned}$$

Como $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, temos que $a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 = a^2 b^2$. Além disso, $a^2 = b^2 + c^2$ o que implica que $b^2 = a^2 - c^2$. Então:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{a^2 b^2 + c b^2 x_0}{y_0 [a^2 (x_0 + c) - b^2 x_0]} \\ &= -\frac{b^2 (a^2 + c x_0)}{y_0 [a^2 x_0 + a^2 c - (a^2 - c^2) x_0]} \\ &= -\frac{b^2 (a^2 + c x_0)}{y_0 [a^2 c + c^2 x_0]} \\ &= -\frac{b^2}{y_0 c} \end{aligned}$$

Agora considere a reta s que passa nos pontos $P(x_0, y_0)$ e $F_2(c, 0)$. Perceba que s tem inclinação α_s e coeficiente angular

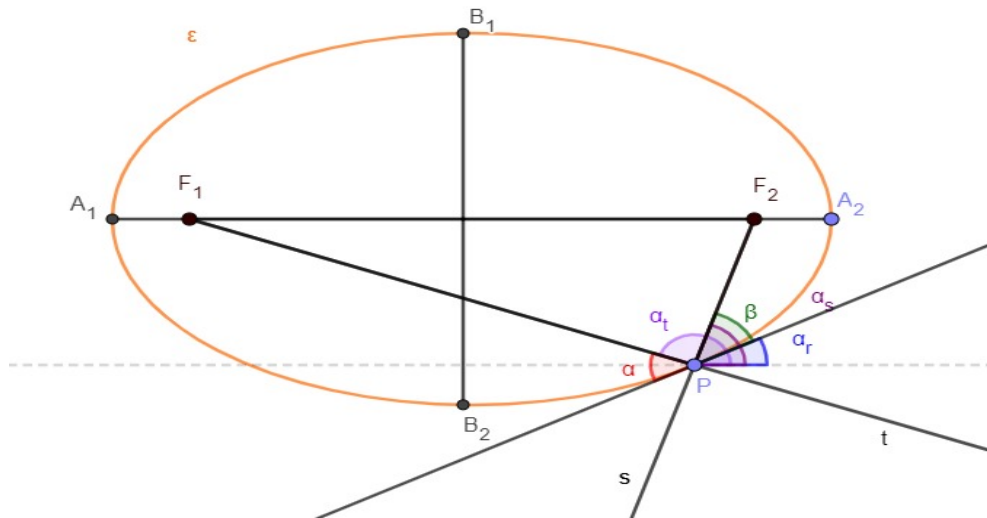


Figura 3.10: Caso 1 do Princípio de Reflexão das Elipses
Fonte: Acervo da autora

$$m_s = \frac{y_0}{x_0 - c}$$

Pela geometria da figura 3.10, temos que $\beta = \alpha_s - \alpha_r$, então:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r} \\ &= \frac{\frac{y_0}{x_0 - c} - \frac{-b^2 x_0}{a^2 y_0}}{1 + \left(\frac{y_0}{x_0 - c}\right) \left(\frac{-b^2 x_0}{a^2 y_0}\right)} \\ &= \left[\frac{a^2 y_0^2 - c b^2 x_0 + b^2 x_0^2}{a^2 y_0 (x_0 - c)} \right] \left[\frac{a^2 (x_0 - c)}{a^2 (x_0 - c) - b^2 x_0} \right] \end{aligned}$$

Como $a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 = a^2 b^2$ e $b^2 = a^2 - c^2$, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{a^2 b^2 - c b^2 x_0}{y_0 [a^2 (x_0 - c) - b^2 x_0]} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{b^2 (a^2 - c x_0)}{y_0 [a^2 x_0 - a^2 c - (a^2 - c^2) x_0]} \\ &= \frac{b^2 (a^2 - c x_0)}{-c y_0 [a^2 - c x_0]} \\ &= -\frac{b^2}{y_0 c} \end{aligned}$$

Logo, $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$, finalmente, $\alpha = \beta$.

Caso 2: $x_0 = c, x_0 = -c$

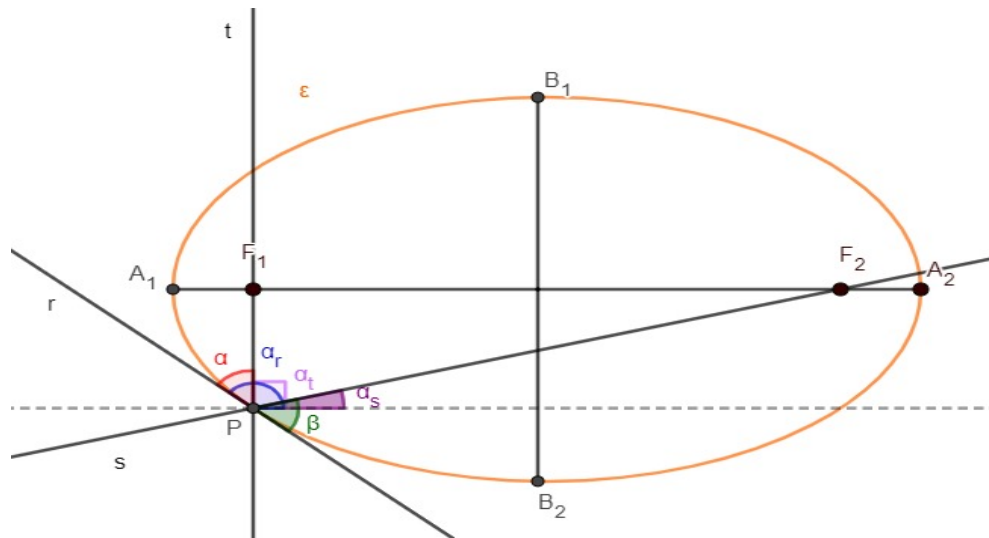


Figura 3.11: Caso 2 do Princípio de Reflexão das Elipses
Fonte: Acervo da autora

Aqui, vamos demonstrar para $x_0 = -c$, para $x_0 = c$ é análogo.

Perceba que agora a reta t é paralela ao eixo vertical, no ponto de abscissa $x_0 = -c$.

Pela proposição 1, se $P = (c, y_0)$

$$a^2 y_0^2 + b^2 c^2 = a^2 b^2$$

$$a^2 y_0^2 = a^2 b^2 - b^2 c^2$$

$$a^2 y_0^2 = b^2 (a^2 - c^2)$$

$$y_0^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

$$y_0 = \frac{b^2}{a}$$

Nesta situação $\alpha = \alpha_r - \frac{\pi}{2}$ e

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{m_r} = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} = \frac{a^2 b^2}{b^2 (-c) a} = -\frac{a}{c}.$$

Pela geometria da figura 3.3.2, temos que $\beta = \pi - \alpha_r + \alpha_s$, e $m_s = -\frac{y_0}{2c} = -\frac{b^2}{2ac}$, daí:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\alpha_s - \alpha_r) = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\frac{b^2}{2ac} - \frac{c}{a}}{1 + \left(\frac{-b^2}{2ac}\right)\left(\frac{c}{a}\right)} \\
&= \left[\frac{-ab^2 - 2ac^2}{2a^2c}\right] \left[\frac{2a^2c}{2a^2c - b^2c}\right] \\
&= \frac{-a(b^2 + 2c^2)}{c(2a^2 - b^2)} \\
&= \frac{-a(a^2 - c^2 + 2c^2)}{c(2a^2 - a^2 + c^2)} \\
&= -\frac{a}{c}
\end{aligned}$$

Perceba então que $tg\alpha = tg\beta$, isto é, $\alpha = \beta$.

□

Portanto, concluímos que dado um ponto P a elipse ε de focos F_1 e F_2 , os seguimentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ formam ângulos iguais com a reta tangente a ε no ponto P , ou seja, o ângulo de incidência é congruente ao ângulo de reflexão.

3.3.3 Reta normal a elipse em um ponto

Este resultado é consequência do Princípio de Reflexão das Elipses, e o chamamos de **propriedade bissetora** das elipses. Dado um ponto P da elipse ε de focos F_1 e F_2 .

Definição 9. *Reta normal a uma curva é a reta perpendicular à reta tangente a curva nesse ponto.*

Com base nos resultados anteriores, segue a seguinte proposição e, em seguida, a sua demonstração:

Proposição 3. *A reta normal a elipse ε em um ponto P é a bissetriz interna do ângulo $\widehat{F_1PF_2}$.*

Demonstração. os seguimentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ formam ângulos congruentes com a reta tangente a ε em P . Como a reta n é perpendicular a r no ponto P , $\alpha + \theta$ e $\beta + \rho$ são congruentes e iguais a $\frac{\pi}{2}$.

$$\alpha + \theta = \beta + \rho$$

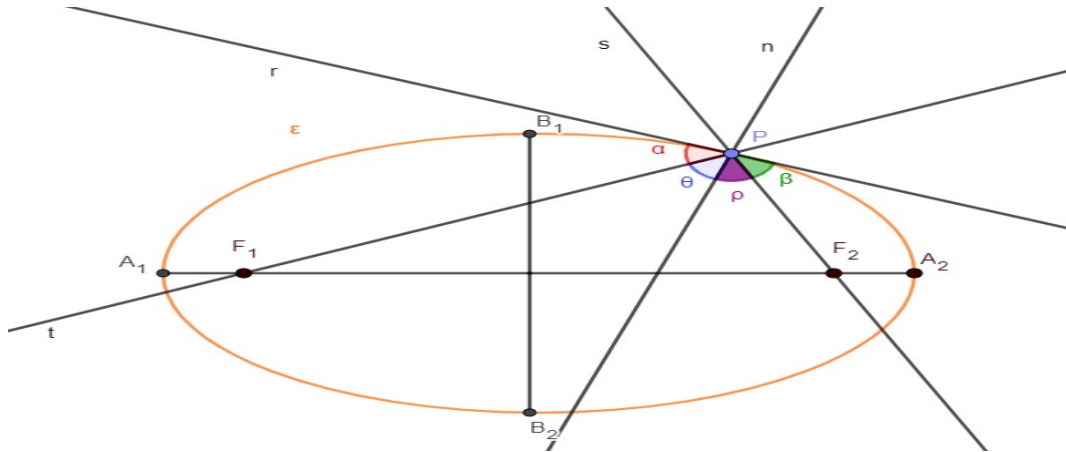


Figura 3.12: Princípio de Reflexão das Elipses
Fonte: Acervo da autora

Além disso, vimos na proposição 2 que $\alpha = \beta$. Então,

$$\theta = \rho$$

□

Neste capítulo vimos a elipse e suas propriedades. Os resultados aqui discutidos servirão de base para o próximo capítulo. Na sequência, veremos como a Propriedade Refletora influencia a trajetória do bilhar e utilizaremos a Construção do Jardineiro para a Construção de uma mesa de bilhar.

4 O Bilhar Elíptico

Você consegue imaginar uma mesa de sinuca com uma posição inicial da bolinha em que toda tacada é certa? Onde, independente, da maneira como você acerte a bola ou o caminho que ela percorra sempre acabará na caçapa?

Na introdução deste trabalho vimos como a mesa de bilhar foi evoluindo com o tempo, possibilitando muitas de suas variações. Essas variações vão além do lazer, possibilitando que o bilhar seja um riquíssimo objeto de estudo.

Inicialmente, como definido por Cristian Reis da Luz, em [6], devemos enunciar a definição matemática de um bilhar:

Definição 10. *Um bilhar plano é o sistema dinâmico que descreve o movimento (dinâmica) de uma partícula pontual de massa m (às vezes também chamada de bola de bilhar). Isto ocorre no interior de um conjunto compacto e convexo, cuja fronteira é uma curva regular ou uma reunião finita de curvas regulares. No interior da curva o movimento é uniforme (velocidade constante) e a reflexão na fronteira da curva é elástica, ou seja, é obedecida a seguinte regra da óptica geométrica: o ângulo de incidência é igual ao ângulo refletido.*

Neste capítulo falaremos sobre o bilhar elíptico. Para isso, vamos considerar a mesa com um formato elíptico e que o jogo é realizado com apenas uma bola. Aqui, poderemos considerar também a bola como um ponto e sua trajetória como segmentos de retas. Quando a trajetória do bilhar atinge a borda da mesa, a bola é refletida com o ângulo de reflexão congruente ao ângulo de incidência.

Aqui utilizamos como referência principal o trabalho de Cristian Reis da Luz sobre bilhares elípticos [6].

Agora veremos as propriedades dinâmicas do bilhar elíptico.

4.1 Bilhar Elíptico

Considere um bilhar com um formato de uma elipse, contendo somente uma caçapa e uma única bola. O ponto inicial da bola será um dos focos e o outro foco é a caçapa. independente da direção que essa bola atinge a borda do bilhar, ela será encaçapada. Esse fato é justificado pelas propriedades refletora e bissetora da elipse demonstrado nas seções 3.3.2 e 3.3.3. No próximo capítulo veremos um exemplo prático.

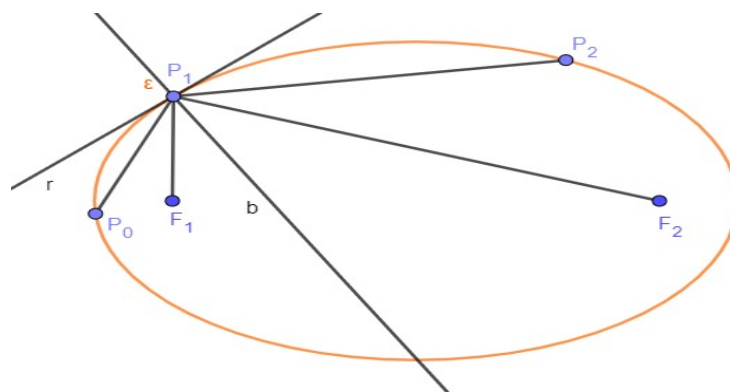


Figura 4.1: Bissetriz de $\widehat{P_0P_1P_2}$ e de $\widehat{F_1P_1F_2}$
Fonte: Acervo da autora

Agora, analisaremos o percurso descrito por uma bola em um bilhar elíptico, sem caçapas, em uma mesa sem atrito e sem interferência de qualquer tipo de energia.

Sejam F_1 e F_2 os focos da elipse, a análise será separada em três situações, nos quais a bola estará passando:

1. pelo segmento $\overline{F_1F_2}$;
2. fora do segmento $\overline{F_1F_2}$,
3. sobre um dos focos.

4.1.1 As reflexões não intersectam os focos F_1 e F_2

Repare que nos dois primeiros casos listados anteriormente a bola não passa pelos focos. Antes de tratarmos sobre esses casos, precisaremos do seguinte lema:

Lema 1. *Considere a trajetória de uma bola que partiu do ponto P_0 , atingindo a borda em P_0 e P_1 , respectivamente, no bilhar elíptico de focos F_1 e F_2 . Perceba que $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_1P_2}$ são segmentos gerados por essa trajetória (como na figura 4.1). Então, os ângulos $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ têm a mesma bissetriz interna.*

Demonstração. Seja r a reta tangente a elipse ε de focos F_1 e F_2 . Pela propriedade refletora de um bilhar os ângulos em que $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_1P_2}$ fazem com a reta tangente à elipse no ponto P_1 são congruentes.

Dado P_0, P_1 e P_2 não colineares, o ângulo que $\overline{P_0P_1}$ faz com a bissetriz interna de $P_0P_1P_2$ é congruente ao ângulo que $\overline{P_1P_2}$ faz com a mesma bissetriz, como na figura 4.2

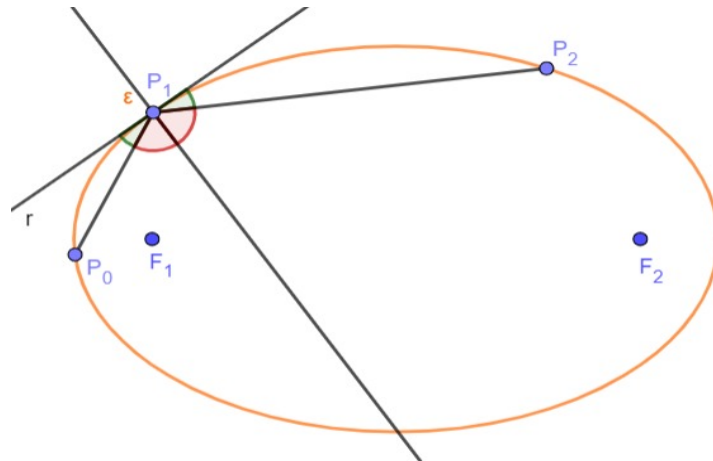


Figura 4.2: O ângulo que $\overline{P_0P_1}$ faz com a bissetriz interna de $P_0P_1P_2$ é congruente ao ângulo que $\overline{P_1P_2}$ faz com a mesma bissetriz

Fonte: Acervo da autora

Conforme a figura 4.3,

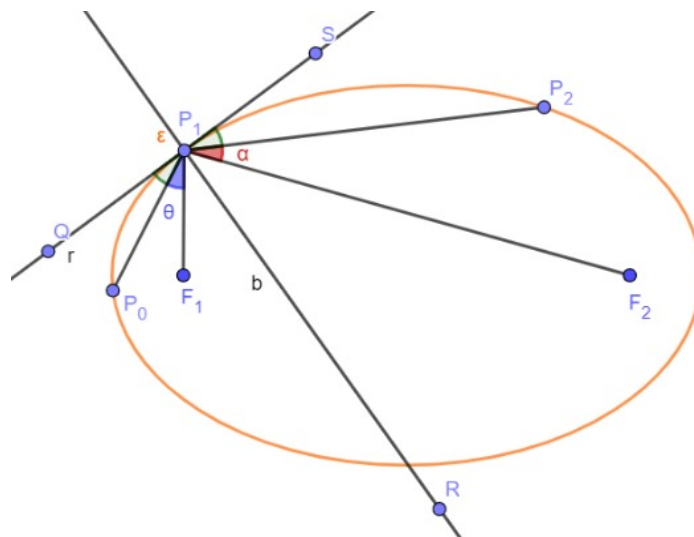


Figura 4.3: Ângulos $\widehat{P_0P_1F_1}$ e $\widehat{F_2P_1P_2}$

Fonte: Acervo da autora

Queremos mostrar que a bissetriz interna dos ângulos $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ coincidem, ou seja, $\theta = \alpha$. Para isso, consideraremos os pontos Q e S pertencentes a reta tangente a ε e um ponto R na reta b .

Perceba na figura 4.3 que,

$$\widehat{QP_1P_0} + \theta + \widehat{F_1P_1R} = \widehat{SP_1P_2} + \alpha + \widehat{F_2P_1R}$$

Pela propriedade refletora do bilhar, sabemos que

$$\widehat{QP_1P_0} \cong \widehat{SP_1P_2}$$

Pela proposição 2:

$$\widehat{F_1P_1R} \cong \widehat{F_2P_1R}$$

Assim, obtemos que $\theta = \alpha$ e concluímos que a reta b é bissetriz do ângulo $\widehat{P_0P_1P_2}$.

Portanto, as bissetrizes internas de $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ coincidem.

□

Agora que temos o lema 1, podemos dar sequência aos estudos dos casos apresentando a seguinte proposição:

Proposição 4. *Se a trajetória do bilhar cruza o segmento $\overline{F_1F_2}$, que une os dois focos, então ela reflete a borda da elipse e cruza o segmento novamente. Da mesma forma, se a trajetória cruza o eixo maior fora do segmento $\overline{F_1F_2}$, à esquerda de F_1 , por exemplo, então, após colidir com a borda da elipse, seu movimento continuará sendo fora do segmento, cruzando o eixo maior à direita de F_2 .*

Demonstração. Sejam $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_1P_2}$ segmentos consecutivos da mesma trajetória, conforme vimos no lema 1, $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ têm a mesma bissetriz interna. Logo, se $\overline{P_0P_1}$ intersecta $\overline{F_1F_2}$, então $\overline{P_1P_2}$ também intersecta $\overline{F_1F_2}$, e se $\overline{P_0P_1}$ não intersecta $\overline{F_1F_2}$, então $\overline{P_1P_2}$ também não vai intersectar $\overline{F_1F_2}$.

As figuras 4.4 , 4.5 , 4.6 e 4.7 ilustram possíveis situações desse caso.

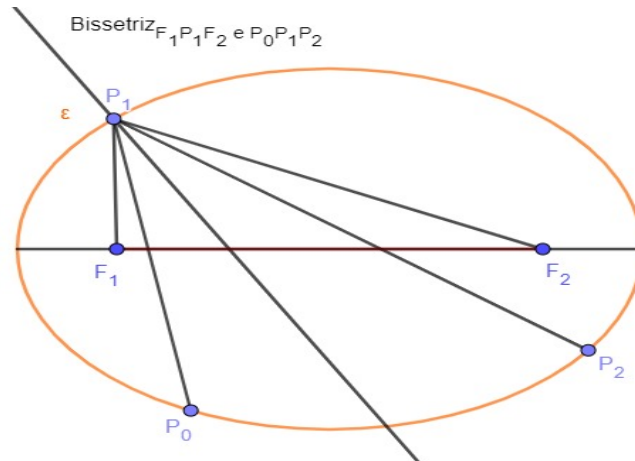


Figura 4.4: $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_1P_2}$ intersectam $\overline{F_1F_2}$ - As bissetrizes de $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ coincidem
 Fonte: Acervo da autora

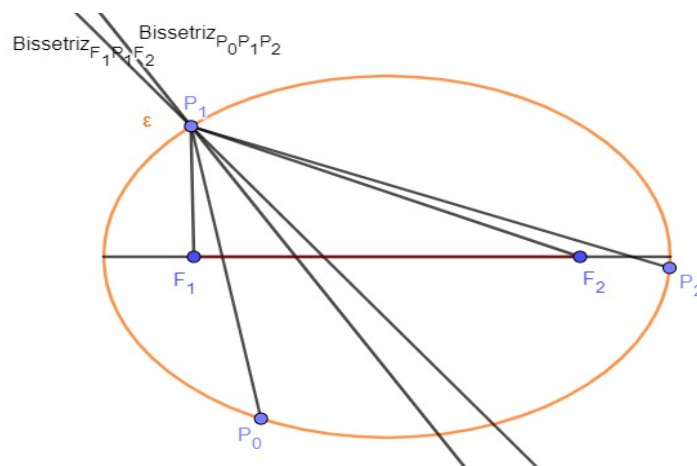


Figura 4.5: $\overline{P_0P_1}$ intersecta $\overline{F_1F_2}$ e $\overline{P_1P_2}$ não intersecta - Aqui as bissetrizes de $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ não podem coincidir
 Fonte: Acervo da autora

Se um dos segmentos da trajetória intersectar $\widehat{F_1F_2}$ então os restantes também o intersectam. Essa prova é feita por indução sobre n , sendo $P_0; P_1; \dots; P_n$ os pontos em que a trajetória colide com a borda da elipse. Também por indução, prova-se que se um dos seus segmentos não intersecta $\widehat{F_1F_2}$ então nenhum dos restantes intersecta esse segmento.

□

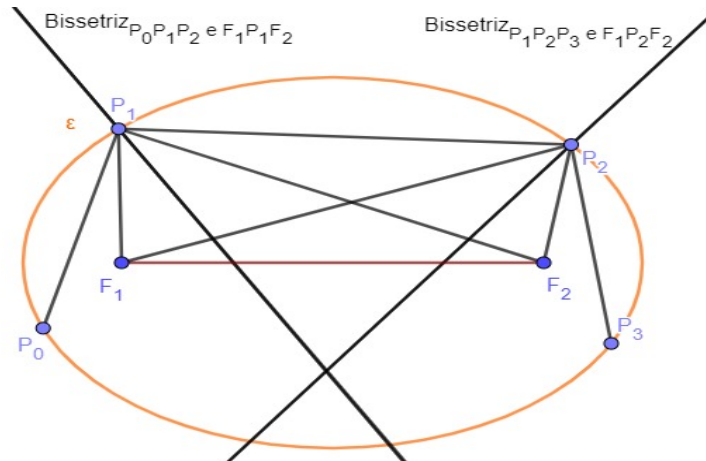


Figura 4.6: $\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}$ e $\overline{P_2P_3}$ não intersectam $\overline{F_1F_2}$ - Aqui as bissetrizes de $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ coincidem, assim como as bissetrizes de $\widehat{P_1P_2P_3}$ e $\widehat{F_1P_2F_2}$.
Fonte: Acervo da autora

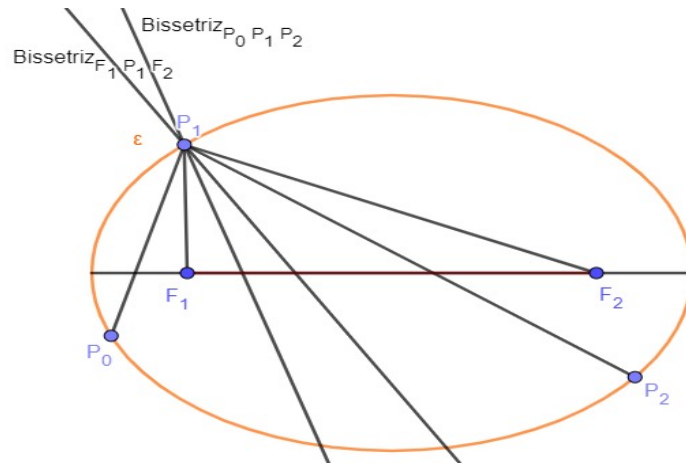


Figura 4.7: $\overline{P_0P_1}$ não intersecta $\overline{F_1F_2}$ e $\overline{P_1P_2}$ intersecta - As Bissetrizes de $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ não podem coincidir.
Fonte: Acervo da autora

Como visto sobre sistema dinâmico no capítulo 2, veremos um interessante resultado quando a bola atinge o bordo da mesa n vezes passando fora de $\overline{F_1F_2}$, a saber, cada segmento da trajetória de uma partícula entre duas colisões consecutivas é tangente a uma elipse confocal. Muitos tipos de bilhares possuem cáusticas. Podemos encontrar uma prova da existência de cáusticas em domínios focalizadores em [11].

Proposição 5. *Se em um bilhar elíptico a bola passa fora do segmento $\overline{F_1F_2}$, então todas as reflexões serão tangentes a uma elipse com os mesmos focos F_1 e F_2 da elipse original.*

Demonstração. Consideremos $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_1P_2}$ segmentos consecutivos de uma trajetória de bilhar. Suponha que $\overline{P_0P_1}$ não cruza o segmento $\overline{F_1F_2}$. Segue-se do lema 1, que os ângulos $\widehat{P_0P_1F_1}$ e $\widehat{P_2P_1F_2}$ são congruentes. Usaremos a seguinte figura como apoio para a nossa demonstração:

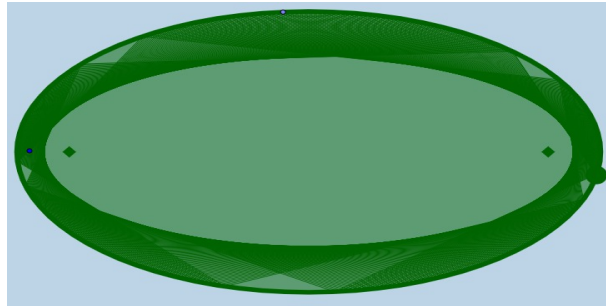


Figura 4.8: Bola passando fora de $\overline{F_1F_2}$. Sua trajetória gera uma cáustica com um formato de uma elipse confocal à elipse original.

Fonte: Elliptic Billiard Table.

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/auXe6ZGk>

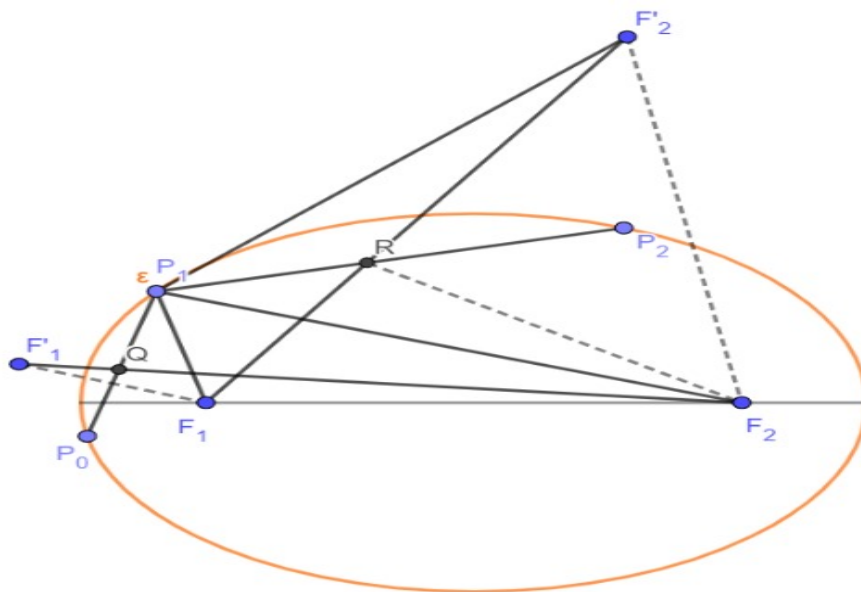


Figura 4.9: Biliar elíptico: bola passando pelo segmento que une os focos

Fonte: Acervo da autora

Seja F'_1 o simétrico de F_1 em relação ao segmento $\overline{P_0P_1}$ e F'_2 o simétrico de F_2 em relação ao segmento $\overline{P_1P_2}$. Construiremos $Q = \overline{F'_1F_2} \cap \overline{P_0P_1}$ e $R = \overline{F'_2F_1} \cap \overline{P_1P_2}$.

Considerando agora a elipse com os focos F_1 e F_2 que é tangente a $\overline{P_0P_1}$ no ponto Q , como na figura 4.10. Da mesma forma uma elipse com focos F_1 e F_2 tangente a $\overline{P_1P_2}$ no ponto R , figura 4.11.

Pela definição de elipse, queremos mostrar que essas duas elipses coincidem ou, equivalentemente, que $F_1Q = QF_2 = F_1Q + QF_2 = F_1R + RF_2 = F_1R + RF'_2$, que se resume a $F'_1F_2 = F_1F'_2$.

Os triângulos $F'_1P_1F_2$ e $F_1P_1F'_2$ são congruentes (Caso LAL), uma vez que, por construção, $F'_1P_1 = F_1P_1$, $F_2P_1 = F'_2P_1$ e os ângulos $\widehat{F'_1P_1F_2}$ e $\widehat{F_1P_1F'_2}$ são congruentes, de fato:

$$\widehat{F'_1P_1F_2} = \widehat{F'_1P_1P_0} + \widehat{P_0P_1F_1} + \widehat{F_1P_1F_2}$$

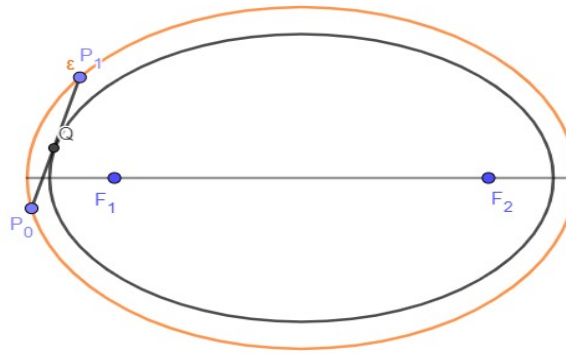


Figura 4.10: Elipse com focos F_1 e F_2 tangente a $\overline{P_0P_1}$ no ponto Q
Fonte: Acervo da autora

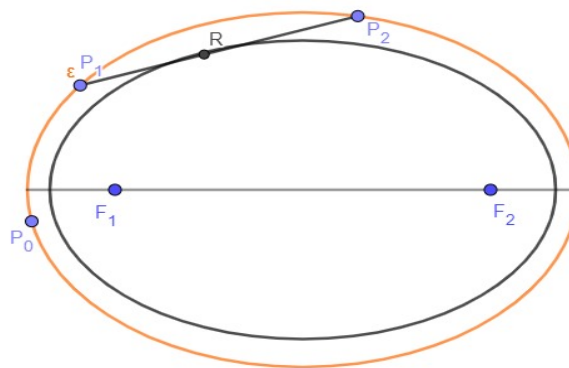


Figura 4.11: Elipse com focos F_1 e F_2 tangente a $\overline{P_1P_2}$ no ponto R
Fonte: Acervo da autora

$$\widehat{F_1P_1F'_2} = \widehat{F_1P_1P_0} + \widehat{F_2P_1P_2} + \widehat{P_2P_1F'_2}$$

Por construção os ângulos $\widehat{P_0P_1F_1} \cong \widehat{F'_1P_1P_0}$ e $\widehat{F_2P_1P_2} \cong \widehat{P_2P_1F'_2}$, então podemos reescrever:

$$\widehat{F'_1P_1F_2} = 2 \cdot \widehat{P_0P_1F_1} + \widehat{F_1P_1F_2}$$

$$\widehat{F_1P_1F'_2} = \widehat{F_1P_1F_2} + 2 \cdot \widehat{F_2P_1P_2}$$

Como pelo lema 1, $\widehat{P_0P_1F_1} \cong \widehat{F_2P_1P_2}$, concluímos que $\widehat{F'_1P_1F_2} \cong \widehat{F_1P_1F'_2}$. Daí $F'_1F_2 = F_1F'_2$, o que nos interessa, pois:

$$|QF_2 - F'_1Q| = |QF_2 - F_1Q| = |F'_1F_2| \text{ e } |F_1R - RF_2| = |F_1R - RF'_2| = |F_1F'_2|$$

Será análogo, por indução, se considerarmos os segmentos consecutivos $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{P_2P_3}$ até os segmentos consecutivos $\overline{P_{n-2}P_{n-1}}$ e $\overline{P_{n-1}P_n}$.

Resultado: como na figura 4.1.1, a elipse interior a ε , que é gerada após as reflexões da trajetória da bola do bilhar passando fora do segmento $\overline{F_1F_2}$ da elipse original. Observa-se que ambas elipses possuem os mesmos focos F_1 e F_2 .

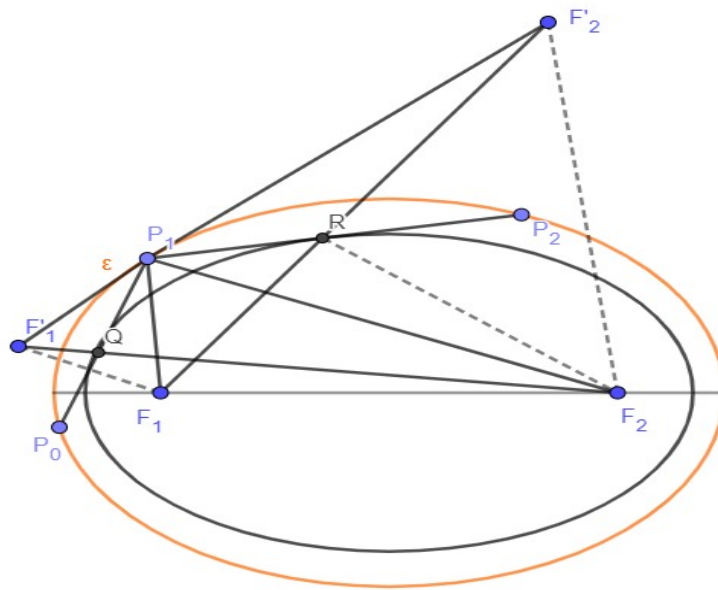


Figura 4.12: A cáustica gerada é uma elipse confocal a elipse original
 Fonte: Acervo da autora

□

Observação 1. Um caso particular para a proposição 5 é, como na figura 4.13, quando a bola sai de um vértice de um dos eixos e vai para o vértice do outro eixo da elipse.

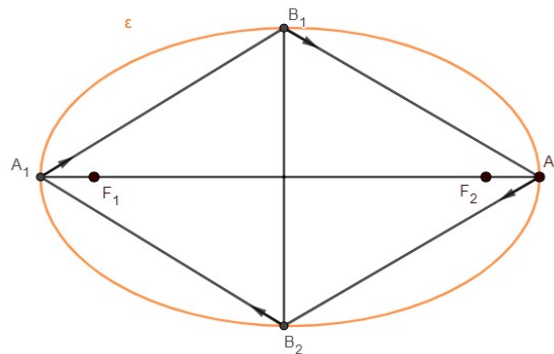


Figura 4.13: Bilhar elíptico: Bola passando nos vértices
 Fonte: Acervo da autora

Com a proposição 5 verificamos um resultado quando a bola passa fora do segmento $\overline{F_1F_2}$. Agora, veremos o que quando a bola tem trajetória interior aos focos, ou seja, passa pelo segmento $\overline{F_1F_2}$.

Proposição 6. *Se em um bilhar elíptico a bola passa entre o segmento $\overline{F_1F_2}$, então todas as reflexões serão tangentes a uma hipérbole de mesmos focos que a mesa de bilhar.*

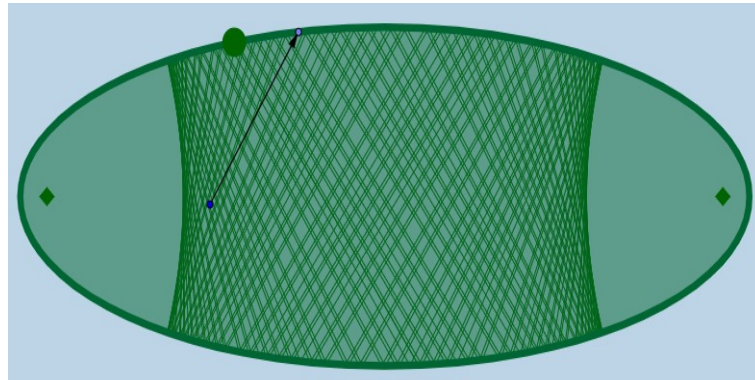


Figura 4.14: Bola passando pelo segmento que une os focos gerando nova cáustica com formato de uma hipérbole

Fonte: Elliptic Billiard Table.

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/auXe6ZGk>

Para fazer a prova dessa proposição precisaremos da seguinte definição:

Definição 11. *A hipérbole é o conjunto dos pontos P no plano tais que o módulo da diferença entre as distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) é constante, ou seja, se $\text{dist}(F_1, F_2) = 2c$, então a hipérbole é o conjunto dos pontos P tais que $|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2a$ em que $a < c$.*

Demonstração. A figura 4.15 nos auxiliará na demonstração.

Como na figura, consideremos a trajetória do bilhar com dois seguimentos consecutivos, os seguimentos $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_1P_2}$, além disso, neste caso $\overline{P_0P_1}$ cruza o segmento $\overline{F_1F_2}$.

Segue-se do lema 1 que os ângulos $\widehat{P_0P_1F_1}$ e $\widehat{P_2P_1F_2}$ são congruentes.

Seja F_1' o simétrico de F_1 em relação ao segmento $\overline{P_0P_1}$ e F_2' o simétrico de F_2 em relação ao $\overline{P_1P_2}$. Façamos: $Q = \overline{F_2F_1'} \cap \overline{P_0P_1}$, $R = \overline{F_1F_2'} \cap \overline{P_1P_2}$.

Cogitemos a hipérbole com os focos F_1 e F_2 . Sejam uma hipérbole tangente em $\overline{P_0P_1}$ no ponto Q (figura 4.16) e uma tangente a $\overline{P_1P_2}$ no ponto R (figura 4.17).

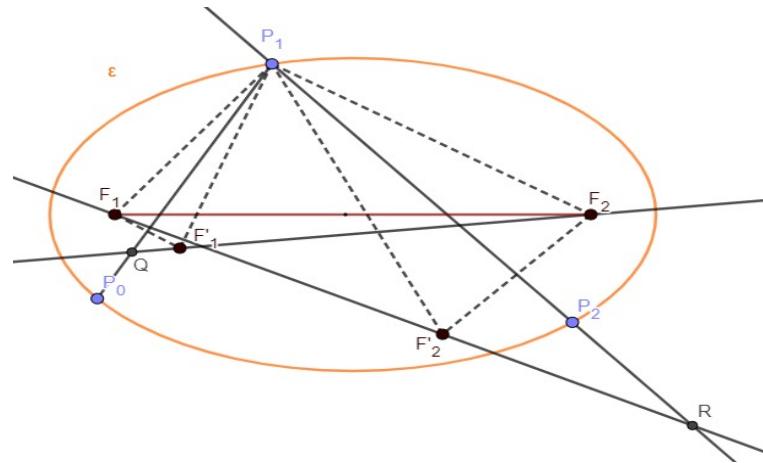


Figura 4.15: Bilhar elíptico: Bola passando nos vértices
Fonte: Acervo da autora

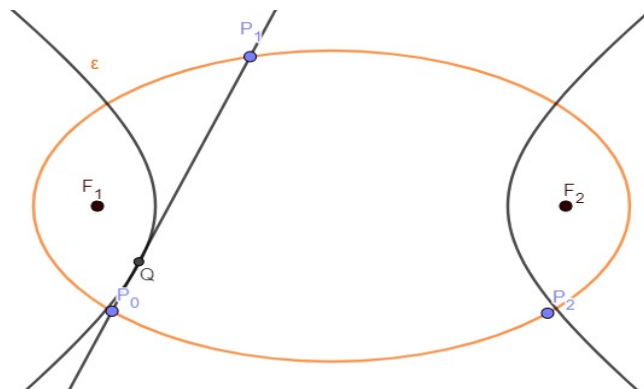


Figura 4.16: Hipérbole de focos F_1 e F_2 tangenciada pelo ponto Q
Fonte: Acervo da autora

Queremos mostrar, pela definição de hipérbole, que essas duas hipérboles coincidem ou, equivalentemente, que $|QF_2 - F_1'Q| = |QF_2 - F_1Q| = |F_1R - RF_2| = |F_1R - RF_2'|$, que se resume a $F_1'F_2 = F_2'F_1$.

Note, na figura 4.15, que os triângulos $F_1'P_1F_2$ e $F_1P_1F_2'$ são congruentes (Caso LAL), uma vez que por construção $F_1'P_1 = F_1P_1$, $F_2P_1 = F_2'P_1$ e os ângulos $\widehat{F_1'P_1F_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2'}$ são congruentes, de fato:

$$\begin{aligned}\widehat{F_1'P_1F_2} &= \widehat{F_1'P_1F_2'} + \widehat{F_2'P_1P_2} + \widehat{P_2P_1F_2} \\ \widehat{F_1P_1F_2'} &= \widehat{F_1P_1P_0} + \widehat{P_0P_1F_1'} + \widehat{F_1'P_1F_2'}\end{aligned}$$

Por construção os ângulos $\widehat{P_0P_1F_1'} \cong \widehat{F_1P_1P_0}$ e $\widehat{F_2'P_1P_2} \cong \widehat{P_2P_1F_2}$, então podemos reescrever:

$$\begin{aligned}\widehat{F_1'P_1F_2} &= 2\widehat{P_2P_1F_2} + \widehat{F_1'P_1F_2'} \\ \widehat{F_1P_1F_2'} &= \widehat{F_1'P_1F_2'} + 2\widehat{F_1P_1P_0}\end{aligned}$$

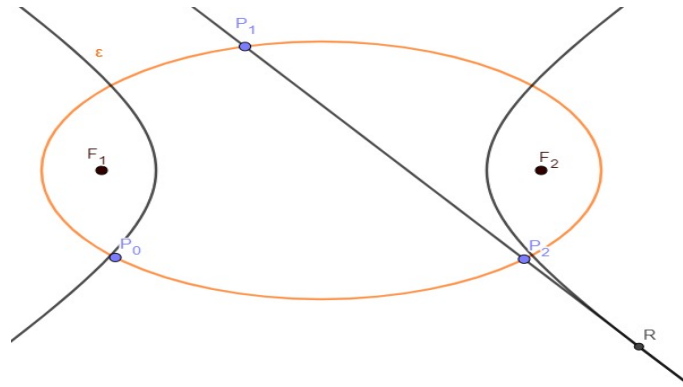


Figura 4.17: Hipérbole de focos F_1 e F_2 tangenciada pelo ponto R

Fonte: Acervo da autora

Como pelo lema 1, $\widehat{F_1 P_0 P_1} \cong \widehat{P_1 P_1 F_2}$, concluímos que $\widehat{F_1' P_1 F_2} \cong \widehat{F_1 P_1 F_2'}$. Daí $F_1' F_2 = F_1 F_2'$, o que nos interessa, pois:

$$|QF_2 - F_1'Q| = |QF_2 - F_1Q| = |F_1'F_2| \text{ e } |F_1R - RF_2| = |F_1R - RF_2'| = |F_1F_2'|.$$

Além disso, será análogo, por indução, se considerarmos os segmentos consecutivos $\overline{P_1 P_2}$ e $\overline{P_2 P_3}$ até os segmentos consecutivos $\overline{P_{n-2} P_{n-1}}$ e $\overline{P_{n-1} P_n}$. Por esse motivo segue o resultado. □

A figura 4.18 representa o resultado, onde a hipérbole é gerada após as reflexões da trajetória da bola do bilhar passar entre o segmento $\overline{F_1 F_2}$ da elipse. Perceba que a elipse e a hipérbole possuem os mesmo focos F_1 e F_2 .

Observação 2. *Um caso particular para a proposição 6 é que quando a bola está no centro da elipse e é tacada em direção a um dos vértices do eixo menor, a bola fará reflexões sempre nesse eixo, gerando uma cônica degenerada.*

4.1.2 A bola passa sobre um dos focos

Finalmente, partiremos para o estudo do último caso das trajetória do bilhar elíptico.

Vimos, pelas propriedades refletora e bissetora das elipses, demonstradas nas proposições 3.3.2 e 3.3.3, que após a tacada da bola passar pelos focos ela será refletida para o outro foco. Considerando o bilhar como um sistema dinâmico e desconsiderando o atrito da mesa e todas as formas de dispersão de energia, ela continuará passando por um foco e refletindo no outro alternadamente.

Proposição 7. *Toda trajetória passando pelos focos F_1 ou F_2 converge para o eixo maior da elipse.*

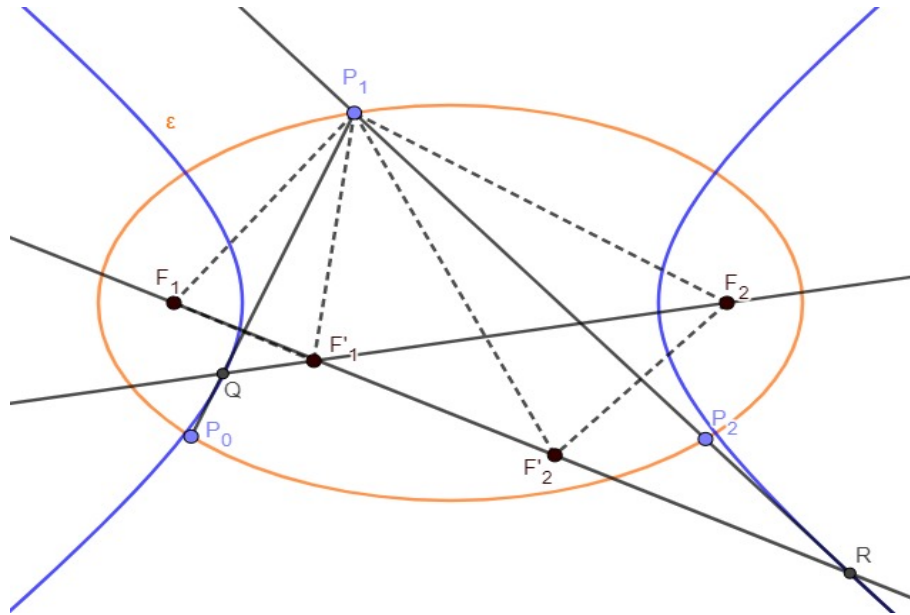


Figura 4.18: A trajetória do bilhar gera cáustica com o formato de uma hipérbole confocal a elipse

Fonte: Acervo da autora

Demonstração. Sem perda de generalidade, se supormos que $F_1 = (-f, 0)$ e $F_2 = (f, 0)$ e fixarmos uma trajetória do bilhar que passa por $(f, 0)$ e denotarmos por r_1 a reta que a contém, então se o coeficiente angular m_1 da reta r_1 é igual a zero, não temos nada a provar. Perceba que nesse caso a bola está sobre o eixo maior da elipse e é tacada na direção dos focos. Pela propriedade refletora da elipse, a bola vai e volta entre seus vértices sobre esse eixo.

Então vamos considerar o caso em que a bola está fora do eixo maior da elipse e é arremessada em direção a um dos focos.

Vamos considerar a figura 4.21 para a nossa demonstração.

Suponhamos que a reta r_1 tenha coeficiente angular $m_1 < 0$.

Seja (x_1, Y_1) o ponto de colisão que r_1 faz com a extremidade da elipse. Note que $x_1 > f_1$, $y_1 < 0$ e $-tg\beta_1 = m_1 = \frac{y_1}{x_1 - f}$.

Consideremos r_2 a outra reta que contém a trajetória consecutiva do bilhar. Seja (x_2, y_2) outro ponto de colisão que r_1 faz com a elipse. Podemos notar que $x_2 < -f_2$, $y_2 > 0$ e $-tg\beta_2 = m_2 = \frac{y_2}{x_2 + f}$.

Note que os triângulos ABC e DEC são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo. Além disso, por construção:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \beta_2 &> \frac{\pi}{2} - \beta_1 \\ \pi - \beta_2 &> \pi - \beta_1 \end{aligned}$$

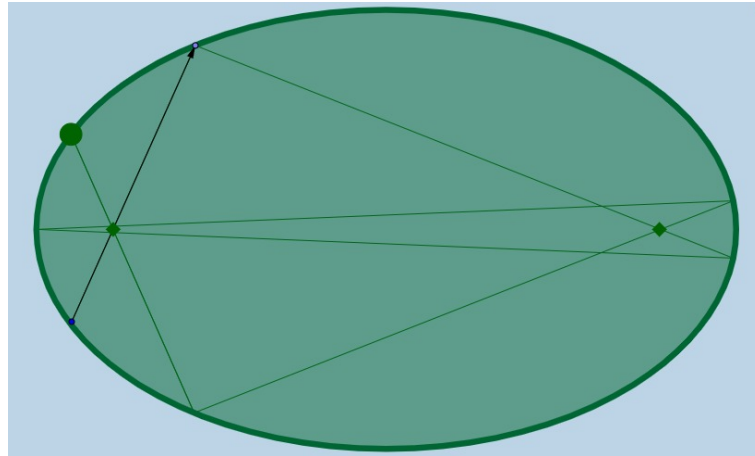


Figura 4.19: Bilhar elíptico: bola passando pelos focos F_1 e F_2

Fonte: Elliptic Billiard Table.

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/auXe6ZGk>

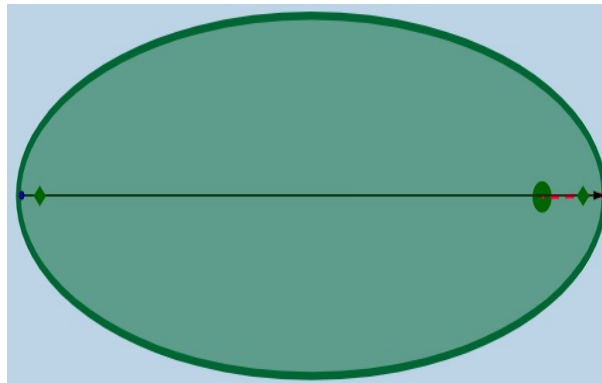


Figura 4.20: Bilhar elíptico: posição inicial da bola no eixo maior -imagem retirada de [7]

Como a tangente é uma função crescente, temos que :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\pi - \beta_2) &> \operatorname{tg}(\pi - \beta_1) \\ -\operatorname{tg}\beta_2 &> -\operatorname{tg}\beta_1 \end{aligned}$$

Podemos concluir então que $m_1 < m_2 < 0$.

Agora vamos considerar uma terceira colisão em (x_3, y_3) , com trajetória representada pela reta r_3 . Consideremos então a figura:

r_3 tem como coeficiente angular $-\operatorname{tg}\beta_3 = m_3 = \frac{y_3}{x_3 - f}$ e satisfaz $x_3 > x > 2$ e $y_3 < y_2$. Como os triângulos DEF e GBF são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo e pela construção temos:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \beta_3 &> \frac{\pi}{2} - \beta_2 \\ \pi - \beta_3 &> \pi - \beta_2 \end{aligned}$$

Novamente, como a função tangente é crescente, temos que:

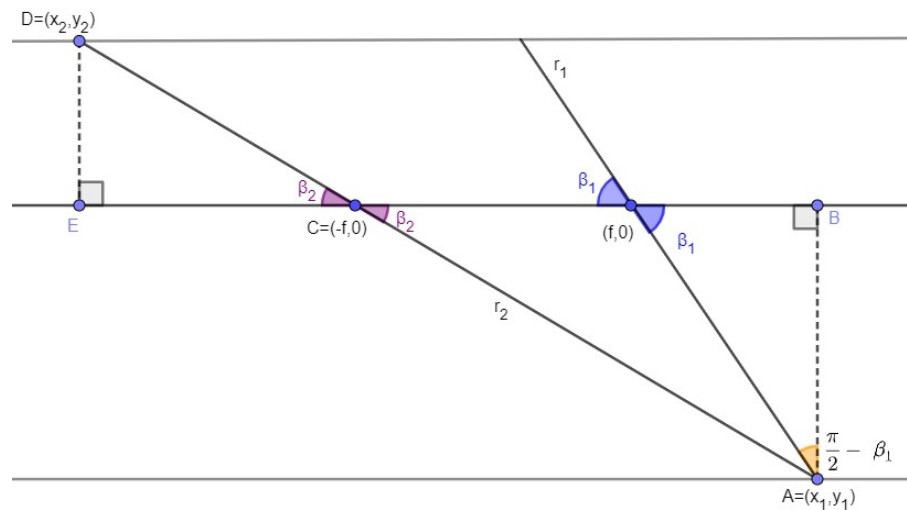


Figura 4.21: Trajetória que converge para o eixo maior da elipse
 Fonte: Acervo da autora

$$\operatorname{tg}(\pi - \beta_3) > \operatorname{tg}(\pi - \beta_2)$$

$$-\operatorname{tg}\beta_3 > \operatorname{tg}\beta_2$$

Logo, podemos concluir que $m_1 < m_2 < m_3 < 0$.

Perceba que, se continuarmos esse processo, obteremos uma sequência crescente e limitada superiormente $m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_j < 0$, logo tal sequência $(m_j), j \in \mathbb{N}$, possui limite. Se o limite dessa sequência é diferente de zero, as trajetórias que passam pelo foco tendem para uma trajetória periódica que não é o eixo maior nem o eixo menor da elipse. Porém, pela monotonicidade da sequência $(m_j), j \in \mathbb{N}$, os ângulos de reflexão que as trajetórias fazem com a elipse após consecutivas colisões, são diferentes, como podem ser vistas também nas construções das figuras 4.21 e 4.22. Isso contradiz o fato da trajetória ser periódica.

Para o caso em que a reta r_1 tenha coeficiente angular $m_1 > 0$, após a primeira colisão, os coeficientes $m_j, j \in \mathbb{N}$ serão todos $m_j < 0$ e o caso recairá no mesmo demonstrado anteriormente.

□

No próximo capítulo veremos sobre uma aplicação do bilhar elíptico explorando, principalmente, este último caso.

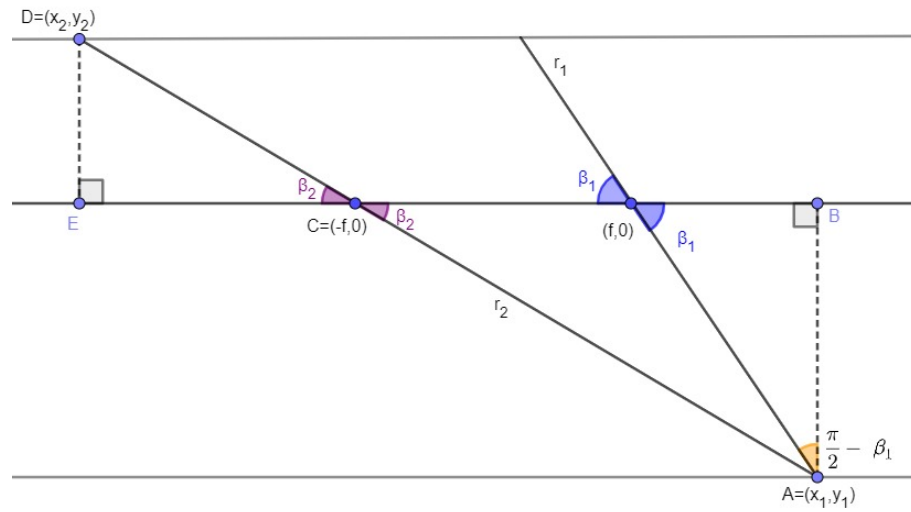


Figura 4.22: Trajetória que converge para o eixo maior da elipse
 Fonte: Acervo da autora

5 Explorando o Princípio de Reflexão das Elipses

A partir dos estudos deste trabalho, em conjunto com meu orientador, o professor doutor Geraldo César Gonçalves, e com o professor doutor Frederico da Silva Reis, chefe do departamento de Educação Matemática, planejamos e aplicamos uma atividade exploratória de geometria analítica para a turma do PROFMAT da UFOP. Essa atividade teve como objetivo apresentar aplicações do Princípio de Reflexão das Elipses aos professores e, ao fim da atividade, saber o que eles acham sobre suas contribuições para a aprendizagem de elipses e sobre uma possível aplicação em sala de aula.

A atividade foi dividida em quatro momentos: Desafio com o Bilhar Elíptico, Apresentação da Elipse e o Princípio de Reflexão, Apresentação de outras de suas Aplicações e O Bilhar Elíptico Visto Pelo Geogebra. Falaremos como foi o processo de planejamento e aplicação da atividade.

5.0.1 Construção da Mesa de Bilhar Elíptico

Foi utilizada uma mesa de bilhar elíptico confeccionada em madeira. Utilizamos a construção do jardineiro, visto em 3.2, para demarcar a elipse na madeira. Para isso, fixamos dois pregos e a eles amarramos as extremidades de uma corda de tamanho superior a distância entre os dois pregos. Em seguida, utilizamos uma caneta para fazer a marcação da elipse, de maneira que esticamos a corda e contornamos a curva gerada por esse processo. O processo de construção foi registrado, figuras 5.1 e 5.2.

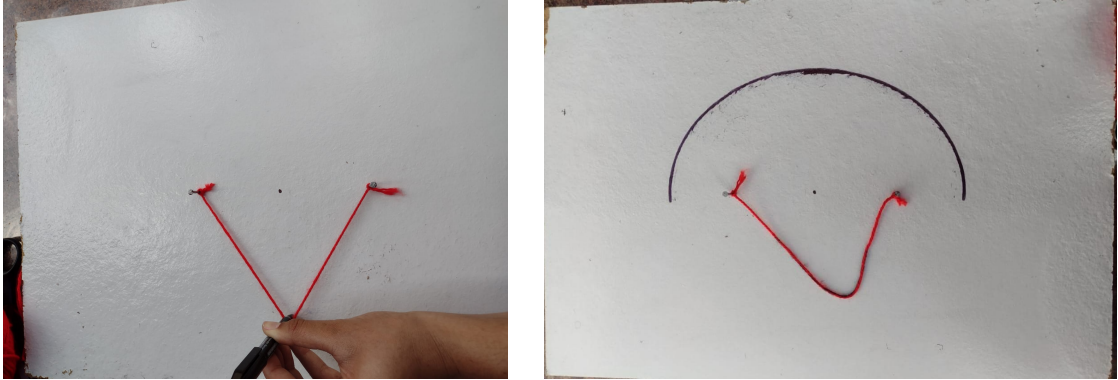


Figura 5.1: Processo de esticar a corda e marcar o material para a construção da curva

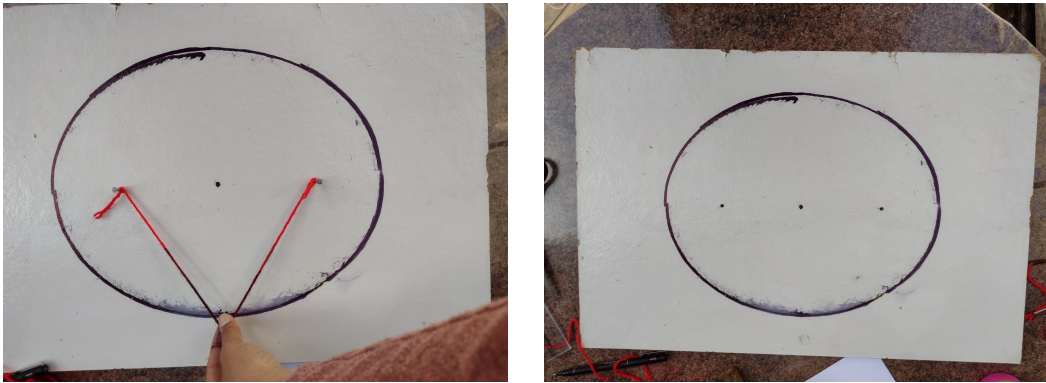


Figura 5.2: Elipse construída pelo método do jardineiro

Cortamos o interior da elipse e, em uma segunda madeira de mesmo tamanho da primeira, marcamos um dos focos da elipse. Para finalizar a construção, nessa última marcação fizemos a caçapa da mesa, de maneira que uma bola de gude possa ser encaçapada, como na figura 5.3



Figura 5.3: Mesa de bilhar finalizada

Fonte: Acervo da autora

5.0.2 Aplicação da atividade

No dia 30 de junho de 2023, reunimos no laboratório de matemática da Universidade de Ouro Preto, meu orientador Geraldo, o professor Frederico e eu, juntamente com os alunos do PROF-MAT. Iniciamos a aplicação apresentando nossa mesa, chamamos a atenção para seu formato elíptico. Desafiamos os alunos a encaçaparem a bola de gude de maneira que a bola acertasse a extremidade da mesa antes de ser encaçapada, ou seja, não valia "mirar" diretamente na caçapa. Ao tentarem cumprir o desafio, levantamos o seguinte questionamento: Há uma posição inicial da bola em que, com certeza, a bola acertará a caçapa independente do ponto de contato com a extremidade da mesa?

Durante o processo de tentarem encaçapar a bola, mostramos que a caçapa estava situada em um dos focos da elipse. À medida que as tentativas ocorriam, chamávamos a atenção para a posição inicial da bola de gude que tinham escolhido e qual a trajetória feita por ela. Para auxiliar na reflexão, relembramos os elementos da elipse e falamos sobre sua definição. Os alunos chegaram à conclusão de que haviam 3 possibilidades de posição inicial: Em cima do outro foco, antes dos focos e entre os focos. Ao fim do desafio os alunos perceberam que quando a posição inicial da bola é o outro foco, a tacada é certa.

Para explicar porque esse fenômeno é possível, apresentamos o princípio de reflexão das elipses. Como não tínhamos tempo suficiente para demonstrá-lo para a turma, com o objetivo de convencê-los, explicamos os principais passos para a sua prova. Além disso, apresentamos outras de suas aplicações, que também foram apresentadas na seção 3.3 desse trabalho.

Em seguida, questionamos os alunos sobre a possibilidade de fazermos inferências quando a posição inicial da bola não é o outro foco. Após a discussão, utilizando o software Geogebra, mostramos as diferentes trajetórias no bilhar elíptico a partir de diferentes posições iniciais da bola, chamando a atenção dos alunos para as cáusticas geradas. A construção utilizada foi "O Bilhar na Elipse - Roteiro 1", disponível em [8].

Por fim, aplicamos um formulário para termos um feedback da nossa atividade. Considerando que os alunos do PROFMAT já têm certa experiência como professores, perguntamos se eles acreditavam que essa atividade poderia ser realizada em uma turma do Ensino Médio e quais as vantagens dessa aplicação. Também perguntamos o que eles acharam da atividade e da utilização da mesa de bilhar e do software Geogebra. No geral, tivemos um feedback positivo. A maioria dos professores acreditam que essa atividade poderia sim ser aplicada em sala de aula, alegando ser uma atividade muito interessante para alunos por apresentar diferentes aplicações e curiosidades de um conteúdo que muitas vezes é trabalhado de maneira básica. Sobre os recursos utilizados durante a aula, os professores ficaram muito interessados e gostaram das diferentes formas de trabalhar o assunto.

6 Conclusão

A matemática está presente nas mais variadas áreas; no entanto, nem sempre é imediata a identificação de sua atuação. Por exemplo, quando imaginaríamos que a associação do jogo de bilhar e cônicas poderiam resultar em um objeto de estudo tão interessante?

Além de ser fonte de lazer o bilhar é um grande objeto de estudo. Há séculos que está presente em nossa sociedade e, devido a sua popularidade, ganhou a atenção de muitas pessoas, de diferentes níveis sociais e com interesses em áreas distintas. Unido às propriedades das elipses, resultou um sistema dinâmico de possível estudo e aplicação.

O Princípio da Reflexão das Elipses possui muitas aplicações no nosso cotidiano, está presente na área da saúde, arquitetura e é uma potente ferramenta para o estudo de bilhares. No bilhar elíptico, essa propriedade permite acertar a caçapa situada em um dos focos partindo do outro foco. Além disso, independente da forma que a bola intercepta o eixo focal, sua trajetória é previsível.

Utilizando a construção do jardineiro, conseguimos confeccionar uma mesa de bilhar com formato elíptico e, a partir da propriedade refletora das elipses, foi possível explorar a dinâmica desse bilhar. Com o auxílio de construções no software Geogebra, conseguimos construir uma atividade exploratória de potencial aplicação em sala de aula.

Bibliografia

- [1] OLIVEIRA, Gilberto Santana. **O Teorema de Sarkovskii e seu Recíproco**. Dissertação de mestrado - Universidade Federal de Ouro Preto, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Ouro Preto, 2019.
- [2] Melbourne School of Mathematics and Statistics, University. **Cobweb Plotter**. Construção do Geogebra feita pela University of Melbourne School of Mathematics and Statistics. Atividade disponível em: <https://www.geogebra.org/m/QJ79IWCL>.
- [3] ANDRADE, Rodrigo Manoel Dias. **Bilhares planares**. Dissertação de mestrado - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. São José do Rio Preto: [s.n.], 2012.
- [4] CALVOSO, Julio Cesar **Estudo das Cônicas com aplicações no software Geogebra como ferramenta didática**. Dissertação de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional, PROFMAT - Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. STRês Lagoas: 2014.
- [5] **Uma partida de bilhar custava um elefante**. Bilhares América, 2020. Disponível em: <https://bilharesamerica.com.br/a-origem-do-bilhar/>
- [6] REIS, Cristian L. **Bilhares em curvas constituídas por arcos elípticos**. Dissertação de mestrado - Universidade Federal de Ouro Preto, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Ouro Preto, 2019.
- [7] DI CAPRIO, Gaetano. **Elliptic Billiard Table**. Atividade feita no Geogebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/auXe6ZGk>.
- [8] SOUZA, Marcelo M. **Bilhares no Geogebra**. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Viçosa. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Viçosa, 2021.
- [9] **Elipsoide, elipse e sua propriedade refletora**. Derivando Matemática, 2020. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/apmat/elipsoide-elipse-e-sua-propriedade-refletora/>.
- [10] BEAUDRY, Pierre. **John Quincy Adams e o princípio da osculação: como JQ Adams fez uso da geometria para enganar seus oponentes políticos**. Impresso no American Almanac, agosto de 1998.
- [11] LAZUTKIN, V.F. **The existence of caustics for a billiard problem in a convex domain..** Math. USSR Izvestija, 7(1):185–214, 1973