UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
BACHARELADO EM ESTATÍSTICA

Introdução ao Estudo Intermediário da Teoria das Probabilidades

Flávio Bueno dos Santos

Ouro Preto-MG
2023

Flávio Bueno dos Santos

Introdução ao Estudo Intermediário da Teoria das Probabilidades

Monografia de Graduação apresentada ao Departamento de Estatística do Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para a obtenção do grau de bacharel em Estatística.

Orientador: Flávio dos Reis Moura
Coorientador: Anderson Ribeiro Duarte

Ouro Preto
2023

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

D722i dos Santos, Flavio Bueno.
Introdução ao estudo intermediário da Teoria das Probabilidades. [manuscrito] / Flavio Bueno dos Santos. Flávio Bueno dos Santos. - 2023.
35 f.: il.: color..

Orientador: Prof. Me. Flávio dos Reis Moura.
Coorientador: Prof. Dr. Anderson Ribeiro Duarte.
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Graduação em Estatística .

1. Teoria das Probabilidades. 2. σ-Álgebras de Eventos. 3. Medida de Probabilidade. 4. Lema de Borel-Cantelli. I. dos Santos, Flávio Bueno. II. Moura, Flávio dos Reis. III. Duarte, Anderson Ribeiro. IV. Universidade Federal de Ouro Preto. V. Título.

CDU 511.7

Bibliotecário(a) Responsável: Luciana De Oliveira - SIAPE: 1.937.800

FOLHA DE APROVAÇÃO

Flávio Bueno dos Santos

Introdução ao estudo intermediário da Teoria das Probabilidades

Monografia apresentada ao Curso de Estatística da Universidade Federal
de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Estatística

Aprovada em 29 de maio de 2023

Membros da banca

Me. Flávio dos Reis Moura - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Anderson Ribeiro Duarte - Universidade Federal de Ouro Preto
Dra. Diana Campos de Oliveira - Universidade Federal de Ouro Preto

Professor Flávio dos Reis Moura, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 29/05/2023

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35402-163
Telefone: (31)3559-1312 - www.ufop.br

Agradecimentos

Gostaria de dedicar este trabalho à memória de minha mãe, Rosemere Freitas dos Santos, que infelizmente não pôde estar presente para ver a conclusão deste projeto. Mãe, você foi minha maior incentivadora, minha fonte de força e inspiração, e eu sempre serei grato pelo amor e apoio que você me deu durante toda a minha vida.

Gostaria também de agradecer ao meu orientador, professor Flávio dos Reis Moura, professor da UFOP por seu apoio e orientação durante todo o processo de elaboração desta monografia. Sua experiência, paciência e sugestões foram inestimáveis para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço também ao meu coorientador, professor Anderson Ribeiro Duarte, professor da UFOP, por sua colaboração, esforços e atenção em todo o processo. Sua ajuda foi de suma importância para a realização deste trabalho e por isso, sou imensamente grato por toda a orientação e apoio oferecidos.

Agradeço ainda aos professores e colegas do Departamento de Estatística, que contribuíram com sua sabedoria e experiência para a minha formação acadêmica.

Além disso, quero expressar minha gratidão à minha família, que sempre esteve ao meu lado, me apoiando e me incentivando a perseguir meus sonhos e objetivos. Seu amor e encorajamento foram essenciais para me ajudar a superar os desafios que encontrei durante a elaboração deste trabalho.

Por fim, gostaria de expressar minha gratidão a todos aqueles que me ajudaram a alcançar este objetivo, incluindo amigos e colegas. Sua ajuda e apoio foram fundamentais para a conclusão deste projeto.

Mãe, este trabalho é dedicado a você como uma expressão do meu amor e saudade eterna. Seu legado sempre estará presente em minha vida e em tudo que eu faço.

Obrigado a todos!

Resumo

Este trabalho apresentou o estudo de alguns conceitos de fundamental importância nas pesquisas de Teoria das Probabilidades em um nível mais avançado. Esses conceitos são fundamentais para introduzir o conceito de Probabilidade de uma forma axiomática. Esse estudo difere dos estudos de disciplinas de Probabilidade usuais em nível de graduação devido ao rigor matemático para abordar os conceitos. Nesta investigação, a Probabilidade é definida em um espaço mensurável, para tanto é fundamental estudar os conceitos de σ-álgebra de eventos, as principais propriedades derivadas dos axiomas que definem esses conceitos, a extensão da definição de $\limsup$ e $\liminf$ entre outros. Como produto principal será apresentada a demonstração do clássico Lema de Borel-Cantelli.

Palavras-chave: Teoria das Probabilidades, σ-Álgebras de Eventos, Medida de Probabilidade, Lema de Borel-Cantelli.

Abstract

This study presented some concepts of fundamental importance in Probability Theory research at a more advanced level. These concepts are essential to introduce the concept of Probability in an axiomatic way. This study differs from the usual studies of Probability disciplines at the undergraduate level due to the mathematical rigor of approaching the concepts. In this investigation, Probability is defined in a measurable space. Therefore it is fundamental to study the concepts of σ-fields of events, the main properties derived from the axioms that illustrate these concepts, and the extension of the definition of lim sup and lim inf, among others. The demonstration of the classic Borel-Cantelli lemma will be presented as the main product.

Keywords: Probability Theory, σ-Fileds of Events, Probability Measure, Borel-Cantelli Lemma.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Imagem representativa para o Evento A e Espaço Amostral Ω. 6

Sumário

1 INTRODUÇÃO 1
1.1 Motivação 1
1.2 Objetivos 2
1.3 Organização 3

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA 5
2.1 Definições para um Modelo Probabilístico 5
2.1.1 Espaço Amostral e Evento 6
2.1.2 Álgebra de Eventos 7
2.1.3 Probabilidade 12
2.1.4 Espaço de Probabilidade 15

3 O CLÁSSICO LEMA DE BOREL-CANTELLI 17
3.1 Lema de Borel-Cantelli 17

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS 21

REFERÊNCIAS 23

1 Introdução

A Teoria das Probabilidades remete ao estudo matematizado das Probabilidades. É possível classificar como seu nome precursor, o matemático, astrônomo e físico francês Pierre Simon Laplace [1]. Apesar de seus estudos se concentrarem na área da Física, Laplace sempre demonstrou interesse na área de Probabilidade. Laplace apresentou resultados de raciocínio indutivo que hoje convergem para as difundidas ideias bayesianas em seu clássico "*Essai philosophique sur les probabilités*" [2].

Toda a Teoria de Probabilidade constitui uma ferramenta essencial para as mais variadas áreas do conhecimento científico. Particularmente a construção inicial de um arcabouço de conceitos e definições é preponderante para a utilização dessa teoria. Estes conceitos usualmente são introduzidos para estudantes de áreas exatas e também correlatas em nível de graduação. Porém, uma maior profundidade exige um maior nível de maturidade matemática dos estudantes.

De uma forma mais específica, a Teoria de Probabilidade é uma vertente bastante difundida na área da Matemática. Sua aplicabilidade muitas vezes aparece na mídia televisiva, radiofônica e escrita associada com assuntos tais como: previsão meteorológica, dados esportivos, dados da Economia, entre muitos outros. Investigações ligadas à história da Matemática associam o surgimento rudimentar de análises probabilísticas para jogos de azar em meados da Idade Média. Particularmente existe uma tendência em associar o raciocínio probabilístico com intenção de predição futurística, mas na verdade o enfoque central é mensurar a chance de ocorrência de resultados associados com experimentos que tenha um caráter aleatório.

Dentre os conceitos fundamentais da teoria de Probabilidade, encontra-se a definição da álgebra de eventos, que consiste em uma estrutura matemática adequada para investigações sobre as relações entre subconjuntos. Este estudo tem foco central na álgebra de eventos e será mais claramente delimitado ainda neste texto introdutório.

1.1 Motivação

A modelagem matemática de diversos problemas de interesse prático está intimamente ligada com os conceitos da álgebra de eventos. Particularmente, estabelecer de forma clara e adequada definição da álgebra de eventos já é, por si só, um objeto de estudo que transcende o nível de estudo em termos de graduação.

Dentre os diversos resultados instigantes da Teoria de Probabilidades, surge o clássico Lema de Borel-Cantelli. Este lema será abordado com maior profundidade neste texto, porém vale discutir uma apresentação intuitiva do propósito do lema. Suponha algum experimento de caráter aleatório, e para este experimento, um resultado possível. Como resultado possível, então existe uma chance que ele ocorra, por menor que seja essa chance, se ela existe, e se o experimento for executado repetidas vezes (um número suficientemente grande de vezes). O resultado certamente ocorrerá em algum momento.

Diversas analogias ao Lema de Borel-Cantelli são apresentadas. Particularmente serão mencionadas a analogia proposta sobre a fé no Divino e a ocorrência de graças do interesse do fiel, como mencionado em "A fé e o lema de Borel-Cantelli" [3], e também a clássica analogia proposta através do "Teorema do macaco infinito". Basicamente, uma afirmação de que um macaco que digite aleatoriamente por tempo infinito irá *quase certamente* reescrever a obra completa de William Shakespeare. Este problema foi apresentado de forma pioneira pelo matemático Émile Borel no ano de 1913 [4]. O Lema de Borel–Cantelli é um teorema nominado em referência a Émile Borel e Francesco Paolo Cantelli.

1.2 Objetivos

As informações anteriores são abrangentes para garantir justificativa e motivação desse estudo. O objetivo central deste estudo é a discussão sobre uma parcela da conceitualização fundamental da Teoria de Probabilidades em um nível matematicamente mais rigoroso. O interesse central está no conjunto de definições e propriedades de álgebras de eventos de um conjunto, σ-álgebras de eventos de um conjunto e medidas em espaços mensuráveis. Com uma abordagem mais precisa acerca destes temas, o nível de estudos de Probabilidade se torna mais avançado que o usual em nível de graduação.

Dada uma definição robusta de σ-álgebra, é possível garantir a validade de diversas propriedades em espaços de Probabilidade, que também serão posteriormente bem definidos. Esse conjunto de definições e conceitos é preponderante para a apresentação do conceito de Probabilidade em uma estrutura axiomática. É importante ressaltar que esse nível de profundidade de estudo ultrapassa os estudos usuais em cursos formais de Probabilidade ao nível de graduação em decorrência de seu rigor matemático. Os conceitos de $\limsup$ e $\liminf$ entre outros, são conceitos de extrema relevância nessa natureza de estudo. Como alvo central desse estudo, o interesse é habilitar estudantes na compreensão de teoremas base do estudo mais rigoroso de Probabilidade, além disso prover capacidade de estabelecer provas da validade destes teoremas. Com caso particular dessa aplicabilidade, o Lema de Borel-Cantelli será enunciado e uma demonstração será apresentada com a utilização desse ferramental de definições probabilísticas no presente estudo.

1.3 Organização

O capítulo introdutório delimita o problema alvo de estudo. Apresenta motivações e justificativas para seu desenvolvimento. Os objetivos de estudo são definidos e a estruturação deste texto é relatada.

O segundo capítulo apresenta o ferramental matemático necessário para esse estudo. As definições preliminares, as propriedades imediatas e outras decorrentes são discutidas. Uma vasta discussão acerca da aplicabilidade das álgebras de eventos para descrever experimentos aleatórios, por meio da construção de espaços amostrais e seus respectivos eventos.

O terceiro capítulo enuncia o clássico Lema de Borel-Cantelli e apresenta uma demonstração baseada na aplicação das definições anteriores. Por fim, um capítulo final apresenta conclusões desse estudo.

2 Fundamentação Teórica e Metodológica

A fundamentação teórica e metodológica para um estudo dessa natureza passa inicialmente por estabelecer o conjunto inicial de definições necessárias para a conceitualização da Teoria de Probabilidade. O suporte centra dessa conceitualização é o clássico livro "Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário" [5] e também o livro "Probabilidade - Notas de aula" [6].

2.1 Definições para um Modelo Probabilístico

O conceito de experimento aleatório é bastante relevante para a introdução das definições preliminares. De uma forma intuitiva, qualquer experimento que ao ser realizado repetidas vezes sob as mesmas condições não garantidamente fornece exatamente os mesmos resultados é dito ser um experimento aleatório.

Exemplo 2.1. *Suponha a realização do experimento de lançar uma moeda e verificar a face que cai voltada para cima. Não é possível garantir qual será o resultado antes da realização desse experimento, e mesmo lançando a moeda nas condições aparentemente idênticas, é possível obter resultados diferentes. Portanto esse é um experimento dito aleatório.*

Em um experimento como o descrito anteriormente, o instinto mais natural é esperar ocorrência de cara ou coroa, e que cada um desses resultados tenha a mesma chance de ocorrer. Alguém poderia questionar a possibilidade da moeda ficar em pé, mas é um resultado tão improvável que não vale a pena considerar no experimento. Suponha a seguinte situação, uma pessoa propõe a outra uma aposta que consiste em jogar uma moeda, se o resultado for cara ou coroa o proponente recebe dessa pessoa mil unidades monetárias, e caso a moeda caia em pé, o proponente pagará cem mil unidades monetárias. Alguém aceitaria tal proposta? Provavelmente não, pois a intuição é suficiente para observar a chance de o resultado não ser cara ou coroa é completamente desprezível. Por isso usualmente é atribuído 50% de chance de o resultado ser cara e 50% de chance do resultado ser coroa.

Exemplo 2.2. *Considere o experimento do lançamento de um dado equilibrado e a observação do resultado em sua face superior. Claramente este é também um experimento aleatório, pois em cada realização desse experimento é possível obter um resultado diferente do anterior ou não. Não é possível predizer com total certeza qual será o resultado do experimento, o que é possível fazer é atribuir uma probabilidade para cada um dos resultados possíveis.*

Ao considerar o conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ como os resultados possíveis, e a informação de que o dado é equilibrado, o mais natural é atribuir probabilidade de $1/6$, para cada um dos resultados possíveis. O conjunto Ω é usualmente denominado espaço amostral do experimento, e qualquer subconjunto de Ω é chamando de evento aleatório. Para este exemplo é possível elencar alguns eventos aleatórios como segue, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{4, 5\}$, $A_4 = \{2, 4, 5\}$ entre outros. Para maior clareza, uma definição mais cuidadosa de espaço amostral e também de evento aleatório serão apresentadas.

2.1.1 Espaço Amostral e Evento

Considere algum experimento aleatório de interesse, seja Ω um conjunto composto por todos os resultados possíveis para o experimento aleatório. Usualmente o conjunto Ω é dito ser o espaço amostral do experimento aleatório de interesse. Usualmente os eventos aleatórios são representados por letras maiúsculas do alfabeto latino. Barry James (2002) [5] propõe um exemplo interessante para o assunto.

Exemplo 2.3. *Suponha escolher ao acaso um ponto em um disco de raio unitário centrado na origem do sistema de coordenadas* $\mathbb{R}^2$*. O conjunto* Ω *de todos os resultados possíveis desse experimento pode ser representado por* $\Omega = \{(x, y);\ x^2 + y^2 < 1\}$*, ou seja, o círculo unitário centrado na origem.*

Definição 2.1 (Evento)**.** *Qualquer subconjunto do espaço amostral* Ω *para um dado experimento aleatório é dito ser um evento em* Ω*.*

Exemplo 2.4. *De volta ao Exemplo 2.3, é possível elencar alguns eventos para esse experimento:* $A = \{$*conjunto dos pontos tais que a distância entre o ponto escolhido e a origem é menor que* 0,5$\}$*. Para este exemplo, o conceito de atribuição de probabilidade ganha uma nova roupagem. Tanto o espaço amostral quanto o conjunto A são conjuntos não enumeráveis. Ainda assim parece razoável atribuir probabilidade ao evento A através da razão entre a área do círculo que corresponde ao evento A e a área do círculo que corresponde ao espaço amostral* Ω*.*

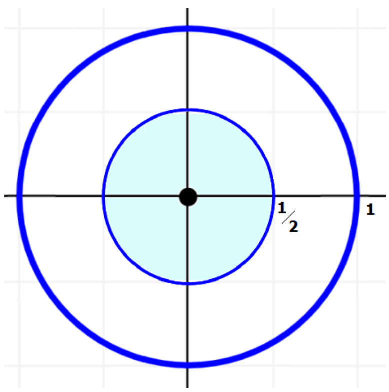

Figura 1 – Imagem representativa para o Evento A e Espaço Amostral Ω.

Problemas como o descrito nos Exemplos 2.3 e 2.4 fez com que a Teoria das Probabilidades tivesse que ser bem fundamentada com base na teoria dos conjuntos. Em muitas situações é possível definir subconjuntos desse espaço amostral cuja área não esteja bem definida, e portanto, para esses conjuntos não seria possível atribuir uma medida de Probabilidade de forma eficaz. De outra forma, é preciso conhecer para quais subconjuntos de Ω é possível definir uma medida de probabilidade. Para isso, o conhecimento de conceitos de álgebra de eventos e de σ-álgebra de eventos é de fundamental importância. Para colaborar com a definição de Evento, algumas definições subjacentes são colocadas.

Definição 2.2 (Evento Certo)**.** *Um evento composto por todos os elementos do espaço amostral Ω, ou seja, o próprio Ω é dito evento certo.*

Definição 2.3 (Evento Impossível)**.** *Um evento cujo subconjunto de Ω associado seja $\varnothing$ (conjunto vazio) é dito um evento impossível.*

Definição 2.4 (Evento Elementar)**.** *Um evento é dito elementar quando o subconjunto associado a ele contém apenas um elemento ω tal que $\omega \in \Omega$.*

2.1.2 Álgebra de Eventos

Definição 2.5. *Seja Ω um conjunto não vazio. Uma classe $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω é chamada de Álgebra de Subconjuntos de Ω, se satisfaz os axiomas $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$:*

$\mathcal{A}_1$: *$\Omega \in \mathcal{F}$;*

$\mathcal{A}_2$: *se $A \in \mathcal{F}$ então $\overline{A} \in \mathcal{F}$, em que $\overline{A}$ é o complemento de A com respeito à Ω;*

$\mathcal{A}_3$: *se $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ então $A \cup B \in \mathcal{F}$.*

O axioma $\mathcal{A}_1$ garante que se $\mathcal{F}$ é uma álgebra de subconjuntos de Ω, então Ω obrigatoriamente pertence a $\mathcal{F}$. Já o axioma $\mathcal{A}_2$ afirma que para um conjunto qualquer pertencente à álgebra de subconjuntos $\mathcal{F}$ então seu complemento também pertencente à álgebra de subconjuntos $\mathcal{F}$. Por fim, o axioma $\mathcal{A}_3$ garante que a união de dois conjuntos, pertencentes a álgebra de subconjuntos $\mathcal{F}$ necessariamente pertencerão à álgebra de subconjuntos $\mathcal{F}$.

Estabelecidos os axiomas $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$, algumas propriedades decorrentes podem ser enunciadas e provadas:

$\mathcal{P}_1$: se $\mathcal{F}$ é uma álgebra de subconjuntos de Ω, então $\varnothing \in \mathcal{F}$;

$\mathcal{P}_2$: se $\mathcal{F}$ é uma álgebra de subconjuntos de Ω e $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, tem-se que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$;

$\mathcal{P}_3$: Se $\mathcal{F}$ é uma álgebra de subconjuntos de Ω e $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, tem-se que $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.

Prova ($\mathcal{P}_1$). *O axioma $\mathcal{A}_1$ garante que $\Omega \in \mathcal{F}$, além disso, é fácil ver que $\overline{\Omega} = \varnothing$, por fim, o axioma $\mathcal{A}_2$ garante que $\overline{\Omega} = \varnothing \in \mathcal{F}$.* □

Prova ($\mathcal{P}_2$). *O axioma $\mathcal{A}_3$ garante que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$. Suponha como hipótese de indução que $B = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \in \mathcal{F}$. Novamente, o axioma $\mathcal{A}_3$ garante que $B \cup A_n \in \mathcal{F}$. Diante disso, o princípio da indução matemática é suficiente para garantir que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.* □

Prova ($\mathcal{P}_3$). *Seja x um elemento qualquer tal que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$, isso implica que $x \in A_i$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Por outro lado, $x \notin \overline{A}_i, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, logo $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, ou seja, $x \in \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right)}$. Como $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$, isso garante que $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \subset \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right)}$.*

Agora, seja x um elemento qualquer tal que $x \in \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right)}$, isso implica que $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i$. Diante disso, $x \notin \overline{A}_i$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, ou seja, $x \in A_i$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Portanto, $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, isso garante que $\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right)} \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Dos dois resultados obtidos, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \subset \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right)}$, e ainda, $\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right)} \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, é possível afirmar que, $\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right)} = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Como $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, através do axioma $\mathcal{A}_2$ e da propriedade $\mathcal{P}_2$, $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i \in \mathcal{F}$, e novamente por meio do axioma $\mathcal{A}_2$, $\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right)} \in \mathcal{F}$. Entretanto, $\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right)} \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, ou seja, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$. □

Um exemplo interessante para construção de álgebras de subconjuntos é o conjunto das partes. Seja Ω um conjunto e $\mathcal{F}$ o conjunto das partes de Ω então $\mathcal{F}$ é uma álgebra de eventos de Ω.

Exemplo 2.5. *Seja $\Omega = \{1, 2\}$ e defina $\mathcal{F}$ como o conjunto das partes, então $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$.*

Exemplo 2.6. *Seja $\Omega = \{a, b, c\}$ e defina novamente $\mathcal{F}$ como o conjunto das partes, então $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \emptyset, \Omega\}$.*

Exemplo 2.7. *Seja $\Omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, defina $\mathcal{F} = \left\{A \subseteq \mathbb{N} | A \text{ é finito ou } \overline{A} \text{ é finito} \right\}$.*

Note que $\Omega = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$, agora seja A um evento em $\mathcal{F}$, ou seja, $A \in \mathcal{F}$, então A é finito, ou $\overline{A}$ é finito, ou seja, isso implica que $\overline{A}$ também está em $\mathcal{F}$.

Agora, suponha $A, B \in \mathcal{F}$, se A e B são finitos, então $A \cup B$ é finito e portanto $A \cup B \in \mathcal{F}$. Já se A é finito e B infinito, então $\overline{B}$ é finito, o que implica que $\overline{A} \cap \overline{B}$ é finito e então $\overline{A} \cap \overline{B} \in \mathcal{F}$, o que garante que $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \in \mathcal{F}$, ou seja, $A \cup B \in \mathcal{F}$. O resultado é análogo se A é infinito e B finito. Por fim, se A e B são infinitos, então $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são finitos, portanto $\overline{A} \cap \overline{B}$ é finito e então $\overline{A} \cap \overline{B} \in \mathcal{F}$, o que garante que $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \in \mathcal{F}$, ou seja, $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Isso garante que $\mathcal{F}$ é uma álgebra de eventos.

É fácil ver que nos dois exemplos anteriores, $\mathcal{F}$ satisfaz os axiomas $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$. Uma pergunta natural seria possibilidade de estender o axioma $\mathcal{A}_3$, para um conjunto infinito de números enumeráveis. Quando isso acontece surge o que é denominado por σ-álgebra de eventos.

Definição 2.6. *Uma classe $\mathcal{F}$ de subconjuntos não vazios de Ω é chamada de σ-álgebra de subconjuntos de Ω, se satisfaz os axiomas $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}'_3$:*

$\mathcal{A}_1$: *$\Omega \in \mathcal{F}$;*

$\mathcal{A}_2$: *se $A \in \mathcal{F}$ então $\overline{A} \in \mathcal{F}$, em que $\overline{A}$ é o complemento de A com respeito à Ω;*

$\mathcal{A}'_3$: *se $A_n \in \mathcal{F}$ $\forall n \in \{1, 2, \ldots\}$ então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.*

Ao observar as definições de álgebra e σ-álgebra, é possível observar facilmente que toda σ-álgebra é uma álgebra. Entretanto, nem toda álgebra é uma σ-álgebra.

Exemplo 2.8. *Seja Ω um conjunto, então $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ é uma σ-álgebra.*

Essa σ-álgebra é dita ser a menor σ-álgebra de eventos de Ω.

Exemplo 2.9. *Seja Ω um conjunto e A um evento tal que $A \subset \Omega$, então $\mathcal{F} = \{A, \overline{A}, \emptyset, \Omega\}$ é uma σ-álgebra.*

É possível produzir um exemplo de uma álgebra que não é σ-álgebra.

Exemplo 2.10. *Agora será construído um exemplo que volta para a estrutura do Exemplo 2.7 que foi provado como álgebra. Seja $\Omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, defina $\mathcal{F} = \{A \subseteq N | A$ é finito ou $\overline{A}$ é finito $\}$.*

Defina $A_n = \{2(n-1)\}$ com $n \geqslant 0$, assim $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{4\}$, $A_4 = \{6\}, \ldots$, que são conjuntos finitos, portanto $\forall n, A_n \in \mathcal{F}$. Se $\mathcal{F}$ for de fato uma σ-álgebra, a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \in \mathcal{F}$ e consequentemente ou $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ é finito ou $B = \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)}$ é finito pois essa é a condição para pertencer a $\mathcal{F}$. Entretanto, A é claramente o conjunto dos pares, logo B é o conjunto dos ímpares, ambos infinitos, Como nem A e nem B são finitos, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \notin \mathcal{F}$, e como consequência $\mathcal{F}$ não pode ser uma σ-álgebra.

Uma decorrência quase imediata do axioma $\mathcal{A}_3'$ para uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ é a proposição seguinte.

Proposição 2.1. *Seja $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω tal que $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$ então $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_i \in F$.*

Prova. *Como $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$, então $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3, \ldots \in \mathcal{F}$. Consequentemente $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_i \in \mathcal{F}$. Assim com $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_i} \in \mathcal{F}$. Uma vez que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_i} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_i$, isso implica que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.* $\square$

Ao adentrar os conceitos associados à σ-álgebra, as sequências de eventos passam a ter papel importante e algumas definições se tornam importantes.

Definição 2.7. *Seja $A_1, A_2, A_3, \ldots$ uma sequência de eventos na σ-álgebra $\mathcal{F}$, a sequência é monótona não-decrescente se $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ usualmente denotado por $A_n \uparrow$. Da mesma forma, $A_1, A_2, A_3, \ldots$ uma sequência de eventos na σ-álgebra $\mathcal{F}$ é monótona não-crescente se $A_n \supset A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ usualmente denotado por $A_n \downarrow$.*

Ainda ao abordar sequência, os conceitos de limite superior e limite inferior emergem também.

Definição 2.8. *Seja $A_1, A_2, A_3, \ldots$ uma sequência de eventos na σ-álgebra $\mathcal{F}$, o limite superior da sequência de eventos é dado por $\limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j$.*

Isto na prática significa que o $\limsup A_n$ *é o conjunto dos elementos de* Ω *que pertencem a um número infinito dos* A_n*, ou seja, é possível observar o* $\limsup A_n$ *através do conjunto* $\{A_n$ *ocorre infinita vezes*$\}$.

Observe que como $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$ então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$, assim como $\bigcup_{i=2}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$, $\bigcup_{i=3}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$, bem como $\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$. Portanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$, ou seja, $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Por conveniência, é usual indicar esse limite por $\limsup A_n$, o termo $n \to \infty$ fica implícito. De uma forma mais intuitiva, o evento $\limsup A_n$ é o evento $\{A_n$ ocorre infinitas vezes$\}$. Esse fato se confirma pelo seguinte raciocínio, se $\omega \in \limsup A_n$, então, é fato que $\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \ \forall n$. Como $\omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, então $\omega \in A_{k_1}$ para algum k_1. Além disso, $\omega \in \bigcup_{k=k_1+1}^{\infty} A_k$, então $\omega \in A_{k_2}$ para algum $k_2 > k_1$. Novamente, $\omega \in \bigcup_{k=k_2+1}^{\infty} A_k$, então $\omega \in A_{k_3}$ para algum $k_3 > k_2$. De forma sequencial, é possível obter uma sequência crescente de inteiros positivos $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$, dependente de ω, tal que $\omega \in A_{k_n}$, $\forall n$. Dessa forma, ω pertence a um número infinito dos A_n's. Reciprocamente, se ω pertence a um número infinito dos A_n's, então $\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \ \forall n$ de modo que $\omega \in \limsup A_n$.

Isto leva a conclusão de que $\omega \in \limsup A_n$ se, e somente se, ω pertence a um número infinito dos A_n. Por isso a notação usual $\limsup A_n = \{A_n$ ocorre infinita vezes$\}$. É importante destacar que o evento "A_n ocorre infinita vezes" é o evento "ocorrência de um número infinito dos A_n's". Cada A_n ocorre ou não, portanto é importante não compreender como infinitas ocorrências de, por exemplo, A_1.

Definição 2.9. *Seja* $A_1, A_2, A_3, \ldots$ *uma sequência de eventos na* σ*-álgebra* $\mathcal{F}$*, o limite inferior da sequência de eventos é dado por* $\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} A_j$.
Isto na prática significa que o $\liminf A_n$ *é o conjunto dos elementos de* Ω *que pertencem a todos os* A_n *a partir de um certo valor n. É possível observar o* $\liminf A_n$ *através do conjunto* $\{A_n$ *ocorre para todo n suficientemente grande*$\}$.

Note que como $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$, então através da Proposição 2.1 é visível que $\bigcap_{j=n}^{\infty} A_j \in \mathcal{F} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Por definição de σ-álgebra, a união enumerável de elementos de uma σ-álgebra pertence a própria σ-álgebra. Diante disso, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$, ou seja, $\liminf A_n \in \mathcal{F}$.

O evento $\liminf A_n$ também tem uma interpretação bastante intuitiva como o $\limsup A_n$. O $\liminf A_n$ é o evento "ocorrência de A_n para todo n suficientemente grande". Para tanto, note que $\omega \in \liminf A_n$ se, e somente se, $\omega \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k$ para algum $n_0 = n_0(\omega)$, ou seja, $\omega \in A_k$ para todo k suficientemente grande, ou seja, $k \geqslant n_0$.

Usualmente os estudos matemáticos denominam os eventos em σ-álgebra por conjuntos mensuráveis. E o espaço definido por uma σ-álgebra e um espaço amostral $(\Omega, \mathcal{F})$ é dito ser um espaço mensurável.

2.1.3 Probabilidade

De posse da definição de espaço mensurável, o conceito de medida precisa também estar definido, será apresentada uma definição geral de medida e posteriormente uma definição de Probabilidade.

Definição 2.10. *(Medida) Seja $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra, uma função μ definida $\mathcal{F}$ que toma valores em* $\mathbb{R}$*, com $\mu(\varnothing) = 0$, com $\mu(A) \geqslant 0$ $\forall A \in \mathcal{F}$ e ainda com $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ para qualquer sequência enumerável de conjuntos A_i em $\mathcal{F}$, disjuntos dois a dois, é dita ser uma medida em $\mathcal{F}$.*

Neste estudo, o interesse central está na definição específica da medida de Probabilidade.

Definição 2.11. *(Medida de Probabilidade) Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável, e P uma função de $\mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$. Uma função P que atende esta definição é dita ser uma medida de Probabilidade e satisfaz os seguintes axiomas:*

$\mathcal{A}_1$: *$P(\Omega) = 1$;*

$\mathcal{A}_2$: *se $A_1, A_2, \ldots$, disjuntos dois a dois, então $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.*

Estabelecida a medida de Probabilidade, algumas propriedades podem ser enunciadas e provadas:

$\mathcal{P}_1$: $P(\varnothing) = 0$;

$\mathcal{P}_2$: se $A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathcal{F}$, com $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$ com $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ então $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$;

$\mathcal{P}_3$: se $A \in \mathcal{F}$, então $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$;

$\mathcal{P}_4$: se A e B $\in \mathcal{F}$, então $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B)$;

$\mathcal{P}_5$: se A e B $\in F$, então $P\left(A \cap B\right) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

$\mathcal{P}_6$: se $A, B \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B$, então $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

Prova ($\mathcal{P}_1$). *Considere o conjunto $\Omega \cup \varnothing \cup \ldots \cup \varnothing$, note que $\Omega = \Omega \cup \varnothing \cup \ldots \cup \varnothing$, portanto $P\left(\Omega\right) = P\left(\Omega \cup \varnothing \cup \ldots \cup \varnothing\right)$. Como $\Omega \cup \varnothing = \varnothing$ então Ω e $\varnothing$ são disjuntos. Isso garante que $P\left(\Omega\right) = P\left(\Omega\right) + P\left(\varnothing\right) + P\left(\varnothing\right) + \ldots$, donde decorre que $P\left(\Omega\right) - P\left(\Omega\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} P\left(\varnothing\right) = 0$, como $0 \leqslant P\left(\varnothing\right) \leqslant 1$, então $P\left(\varnothing\right) = 0$.* □

Prova ($\mathcal{P}_2$). *Considere uma sequência de eventos disjuntos tais que $A_i = \varnothing$, $\forall i > n$, ou seja $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \varnothing$. Nesta situação, vale que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, portanto,*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Através do axioma $\mathcal{A}_2$, $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$ logo,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + P(A_{n+1}) + P(A_{n+2}) + \ldots.$$

Agora com a propriedade $\mathcal{P}_1$, $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + 0 + 0 + \ldots = P\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$, então $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)$. □

Prova ($\mathcal{P}_3$). *Observe que $A \cup \overline{A} = \Omega$, portanto:*
$P\left(\Omega\right) = P\left(A \cup \overline{A}\right) = P\left(A\right) + P\left(\overline{A}\right) \Rightarrow P\left(\Omega\right) - P\left(A\right) = P\left(\overline{A}\right) = 1 - P\left(A\right)$. □

Prova ($\mathcal{P}_4$). *Seja $x \in A$, se $x \in B$ então $x \in A \cap B$, caso contrário, se $x \in \overline{B}$ então $x \in A \cap \overline{B}$.*

Diante disso, se $x \in A$, então $x \in (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, ou seja, $A \subset (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

Seja $x \in (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, então $x \in (A \cap B)$ ou $x \in (A \cap \overline{B})$. Isso garante que $x \in A$, ou seja, $A \supset (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

Portanto $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, note ainda que $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \varnothing$ pois $B \cap \overline{B} = \varnothing$. De posse dessa igualdade, note que $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ por meio da propriedade $\mathcal{P}_2$, logo vale a igualdade $P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap \overline{B})$. □

Prova ($\mathcal{P}_5$). *Como verificado na prova da propriedade $\mathcal{P}_4$, $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. Analogamente $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$. Diante disso, $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, ou* *seja,* $A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)$. *Observe ainda que* $(A \cap \overline{B})$, $(\overline{A} \cap B)$ *e* $(A \cap B)$ *são disjuntos dois a dois. Com estes fatos,* $P(A \cup B) = P\left[\left(A \cup \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B)\right]$ *por meio da propriedade* $\mathcal{P}_2$, $P(A \cup B) = P\left(A \cup \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right) + P(A \cap B)$. *Agora, através da propriedade* $\mathcal{P}_4$,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$ □

Prova ($\mathcal{P}_6$). *Observe que* $B - A = \overline{A} \cap B$, *como* $A \subseteq B$, *então* $B = A \cup (\overline{A} \cap B)$. *Note que* $A \cap (\overline{A} \cap B) = \varnothing$, *então pela propriedade* $\mathcal{P}_4$, $P(B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) + P(B - A)$. *Isso garante que* $P(B - A) = P(B) - P(A)$. □

Ao admitir a existência de probabilidades em uma determinada σ-álgebra $\mathcal{F}$ de eventos. Portanto, sob a suposição de uma medida de Probabilidade que para todo evento $A \in \mathcal{F}$ associa A ao número real $P(A)$ então é possível estabelecer a clássica definição axiomática de Probabilidade proposta por Kolmogorov [7].

Definição 2.12. *Seja* $\mathcal{F}$ *uma álgebra e* Ω *um espaço amostral com* $\Omega \in \mathcal{F}$, *então:*

$\mathcal{A}_1$: $P(A) \geqslant 0,\ \forall A \in \mathcal{F}$;

$\mathcal{A}_2$: $P(\Omega) = 1$;

$\mathcal{A}_3$: *se* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ *disjuntos dois a dois, então* $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

É possível observar os axiomas $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ são os axiomas da definição 2.11, ou seja, a definição geral de medida de Probabilidade. Ao considerar a definição 2.12, o Axioma $\mathcal{A}_3$ é usualmente denominado por aditividade finita e a definição anterior é válida para $\mathcal{F}$ como uma álgebra de eventos. Porém, para $\mathcal{F}$ como uma σ-álgebra de eventos, o axioma $\mathcal{A}_3$ pode ser remodelado para:

$\mathcal{A}'_3$: se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ disjuntos dois a dois, então $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

O axioma $\mathcal{A}'_3$ define a σ-aditividade, adequada para o caso em que $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra. Dessa definição decorre a Proposição que afirma que a validade do axioma $\mathcal{A}'_3$ implica na validade do axioma $\mathcal{A}_3$.

Proposição 2.2. *Se a medida de Probabilidade* P *é* σ*-aditiva, então* P *é finitamente aditiva.*

Essa proposição nada mais é que a propriedade $\mathcal{P}_2$ provada para a definição de geral de Probabilidade apresentada através da definição 2.11. Ao definir a medida de probabilidade, voltaremos às sequências de eventos em σ-álgebra para enunciar uma outra propriedade de suma importância, a "continuidade no vazio".

$\mathcal{P}_7$: Seja $A_1, A_2, A_3, \ldots$ uma sequência de eventos na σ-álgebra $\mathcal{F}$, se esta sequência decresce para o vazio, ou seja, $A_n \downarrow \varnothing$, então $P(A_n) \to 0$.

Prova ($\mathcal{P}_7$). *Observe que se a sequência $A_1, A_2, A_3, \ldots$ decresce para o vazio $A_n \downarrow \varnothing$, então $A_n \supset A_{n+1}$, $\forall n$, ou seja $A_1, A_2, A_3, \ldots$ decresce, e $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ e então $P(A_n) \to 0$.* □

Além disso, outra propriedade relevante é a continuidade da medida de Probabilidade.

$\mathcal{P}_8$: Seja $A_1, A_2, A_3, \ldots$ uma sequência de eventos na σ-álgebra $\mathcal{F}$, se $A_n \uparrow A$, então vale que $P(A_n) \uparrow P(A)$, se $A_n \downarrow A$. Então $P(A_n) \downarrow P(A)$.

Prova ($\mathcal{P}_8$). *Suponha que ocorra $A_n \downarrow A$, ou seja $A_n \supset A_{n+1}$ $\forall n$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Dessa forma, $P(A_n) \geqslant P(A_{n+1})$ e $(A_n - A) \downarrow \varnothing$, isso implica que $P(A_n - A) \to P(\varnothing) = 0$. De acordo com a propriedade $\mathcal{P}_7$ da continuidade no vazio, como $A \subset A_n$, então $P(A_n) - P(A) \to 0$ e $\{P(A_n)\}_{n\geq 1}$ e não-crescente, logo $P(A_n) \downarrow P(A)$.*

Por outro lado, agora suponha que ocorra $A_n \uparrow A$, ou seja $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$, com isso $\overline{A}_n \downarrow \overline{A}$. Logo, $P\left(\overline{A}_n\right) \downarrow P(\overline{A})$, ou seja, $1 - P(A_n) \downarrow 1 - P(A)$, donde segue que $P(A_n) \uparrow P(A)$. □

2.1.4 Espaço de Probabilidade

De posse do claro conceito de espaço amostral (Ω), da definição de álgebra de eventos e σ-álgebra de eventos, e ainda de medida de Probabilidade, é possível definir um espaço de Probabilidade.

Definição 2.13. *Um espaço de Probabilidade é um trio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, em que:*

i. *Ω é um conjunto não vazio;*

ii. *$\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra de eventos de Ω;*

iii. *P é uma medida de Probabilidade na σ-álgebra de eventos $\mathcal{F}$.*

3 O Clássico Lema de Borel-Cantelli

O nível de rigor e profundidade para apresentação das definições anteriores é por si só material condizente para a profundidade necessária esperada em um Trabalho de conclusão de curso de graduação em Estatística. Por outro lado, uma discussão costumeira cerca a necessidade/validade de investigar assuntos tão abstratos quanto os descritos. Para os afeitos às investigações na área de Probabilidade a resposta é quase imediata. Pouquíssimo da teoria existente, que fornece enorme subsídio ao funcionamento das mais avançadas técnicas estatísticas, e também de boa parte das mais rudimentares técnicas estatísticas, não poderia ser validado do ponto de vista matemático.

Em virtude disso, este estudo apresentará uma aplicação deste conhecimento através da prova de validade de um clássico teorema de Probabilidade, o conhecido Lema de Borel-Cantelli.

3.1 Lema de Borel-Cantelli

Teorema 3.1. *Sejam $A_1, A_2, \ldots$ eventos aleatórios em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ou seja, $A_n \in \mathcal{F}$ $\forall n$.*

i. Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, então $P(A_n \text{ infinitas vezes}) = 0$;

ii. se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, e ainda os A_n's são independentes, então $P(A_n \text{ infinitas vezes}) = 1$.

Antes mesmo de provar a validade do Lema de Borel-Cantelli, vale ressaltar que o item (*ii*) não vale necessariamente sem independência. Por exemplo, seja $A_n = A$ $\forall n$, em que $0 < P(A) < 1$. Então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, mas o evento $\{A_n \text{ infinitas vezes}\} = A$, e portanto $P(A_n \text{ infinitas vezes}) = P(A) < 1$.

Prova (item *i*)**.** *se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, então $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \to 0$ quando $n \to \infty$. Entretanto, $\{A_n$ infinitas vezes$\} \subset \displaystyle\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ $\forall n$, logo $P(A_n \text{ infinitas vezes}) \leqslant P\left(\displaystyle\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \to 0$. Portanto, $P(A_n \text{ infinitas vezes}) = 0$.* $\square$

Prova (item *ii*). *Neste ponto, para garantir a validade do resultado, basta provar que* $P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n\right) = 1\ \forall n$, *isto porque* $\{A_n$ *infinitas vezes* $\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, *que é a interseção de uma quantidade enumerável de eventos, todos com probabilidade um. Portanto, trata-se de uma interseção que também tem probabilidade um.*

Para garantir tal fato, seja $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, *então* B_n *contém os eventos* $\bigcup_{k=n}^{n+m} A_k$ *para todo* m, *e ainda,* $\overline{B}_n \subset \overline{\left(\bigcup_{k=n}^{n+m} A_k\right)} = \bigcap_{k=n}^{n+m} \overline{A}_k$. *Diante disso, para todo* m, *é válido afirmar que* $1 - P(B_n) = P\left(\overline{B}_n\right) \leqslant P\left(\bigcap_{k=n}^{n+m} \overline{A}_k\right)$.

Dada a independência dos A_n*'s,* $1 - P(B_n) \leqslant P\left(\bigcap_{k=n}^{n+m} \overline{A}_k\right) = \prod_{k=n}^{n+m} P\left(\overline{A}_k\right) = \prod_{k=n}^{n+m} [1 - P(A_k)]$. *Como* $1 - p \leqslant e^{-p}$ *para* $0 \leqslant p \leqslant 1$, *então,* $1 - P(B_n) \leqslant \prod_{k=n}^{n+m} e^{-P(A_k)} = \exp\left\{-\sum_{k=n}^{n+m} P(A_k)\right\} \to 0$ *quando* $m \to \infty$. *Isso ocorre pois* $\sum_{k=n}^{n+m} P(A_k) \to \infty$ *quando* $m \to \infty$. *Portanto* $P(B_n) = 1\ \forall n$. □

É possível observar que o vasto conjunto de definições matemáticas estabelecidos no Capítulo 2 foi o ferramental necessário e suficiente para garantir a validade do lema de Borel-Cantelli. Decorre ainda do lema o corolário a seguir.

Corolário 3.1. *Considere uma sequência de ensaios binomiais independentes com probabilidade* p_n *de sucesso para o n-ésimo ensaio. Seja* $X_n = 1$ *se o n-ésimo ensaio é um sucesso,* $X_n = 0$ *se o n-ésimo ensaio é um fracasso. Então, é fato que se* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$, *então* $P\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty\right) = 1$, *por outro lado, se* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$, *então* $P\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty\right) = 1$. *Em outras palavras,*

- $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty \Rightarrow$ *ocorre um número finito de sucessos, quase certamente;*
- $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty \Rightarrow$ *ocorre um número infinito de sucessos, quase certamente.*

Prova. *Seja* A_n *o evento "sucesso no n-ésimo ensaio", de outra forma, o evento* $[X_n = 1]$, *então* $P(A_n) = p_n$ *e os* A_n *são independentes.*

Pelo lema de Borel-Cantelli, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty \Rightarrow P\left(A_n \text{ infinitas vezes }\right) = 0$ *e também,* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty \Rightarrow P\left(A_n \text{ infinitas vezes }\right) = 1$*. Entretanto, o evento* $\{A_n$ *infinitas vezes* $\}$ *é o evento "um número infinito de sucessos entre todos os ensaios" e ainda, o complemento do evento* $\{A_n$ *infinitas vezes* $\}$ *é o evento "apenas um número finito de sucessos entre todos os ensaios". Portanto, o evento* $\{A_n$ *infinitas vezes* $\}$ *é o evento* $\left\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty\right\}$ *e o complemento do evento* $\{A_n$ *infinitas vezes* $\}$ *é o evento* $\left\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty\right\}$. □

Diante disso, voltamos ao clássico exemplo do Teorema do macaco infinito mencionado na introdução deste estudo. Ao colocar um macaco diante de uma máquina de escrever, é razoável supor que haja uma probabilidade positiva, embora reduzidíssima, dele datilografar as obras completas de William Shakespeare sem erro. Ao estabelecer como o primeiro ensaio bem sucedido se ele realiza essa façanha, o primeiro ensaio fracassado quando ele comete o primeiro erro. Ao final do primeiro ensaio, que provavelmente chegará logo, dar-lhe comida (para garantir a independência dos ensaios) e começar o segundo ensaio. Continuar assim até o infinito. Pelo Corolário 3.1, com $p_n = p > 0\ \forall n$, há probabilidade um de que o macaco escreva as obras completas de William Shakespeare um número infinito de vezes.

4 Considerações Finais

Este trabalho abordou resultados e definições clássicas da Teoria de Probabilidade. Grande parte das definições e resultados são obtidas do clássico livro "Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário" [5], principal referência bibliográfica deste estudo. Todavia o interesse estava em ultrapassar a compreensão de conceitos probabilísticos em nível de estudo de graduação, o que já configura em um objeto de trabalho bastante ambicioso.

O conjunto de definições básicas dos espaços de Probabilidade foi percorrido com o rigor matemático necessário para este propósito. Particularmente foi dedicado cuidado e zelo em estabelecer de forma detalhadas as definições e as provas das propriedades imediatas decorrentes.

O estudo fez uma ligação entre a validade do estudo destas definições com o rigor matemático necessário com as estratégias necessárias para validar teoremas clássicos do estudo de Probabilidade. Em particular, todo este conhecimento foi aplicado na produção de uma demonstração cuidados para o Lema de Borel-Cantelli.

Um dos objetivos deste estudo é atrair o foco dos estudantes de graduação para a importância das investigações da Teoria de Probabilidades que é suporte fundamental para a validação das mais variadas técnicas estatísticas. A possibilidade de alunos de graduação percorrerem este nível de profundidade é de fato um resultado exitoso e promissor. Um leque de novas possibilidades de estudo neste nível fica aberto, como por exemplo definir bem a σ-álgebra de Borel e suas aplicabilidades.

Referências

[1] Hájek, Alan e Christopher Hitchcock: *The Oxford handbook of probability and philosophy*. 2016. Citado na página 1.

[2] Laplace, Pierre Simon: *Essai philosophique sur les probabilités*. Bachelier, 1825. Citado na página 1.

[3] Santos, Thiago Rezende dos: *A fé e o lema de Borel-Cantelli*. `https://www.ultimato.com.br/comunidade-conteudo/a-fe-e-o-lema-de-borel-cantelli`". 18 de Novembro, 2007. Citado na página 2.

[4] Borel, Émile: *La mécanique statique et l'irréversibilité*. Journal of Physics: Theories and Applications, 3(1):189–196, 1913. Citado na página 2.

[5] James, Barry R: *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário, 2a. edição*. IMPA, Rio de Janeiro, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 5, 6 e 21.

[6] Machado, Daniel Miranda e Rafael Grisi: *Probabilidade - Notas de aula*. `https:danielmiranda.prof.ufabc.edu.br/prob/probabilidade.pdf`". 21 de Março, 2023. Citado na página 5.

[7] Kolmogorov, Andreĭ Nikolaevich e Albert T Bharucha-Reid: *Foundations of the theory of probability: Second English Edition*. Courier Dover Publications, 2018. Citado na página 14.